САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. З. Веселовская, Н. Б. Шепелявая

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Понятие вероятности

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург
2017

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент С. М. Ананьевский (СПбГУ),
доктор физ.-мат. наук, проф. В. Б. Смирнова (СПбГАСУ)

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методической комиссией
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета

Веселовская А.З., Шепелявая Н.Б.
Элементы теории вероятностей. Понятие вероятности: учеб. пособие. – СПб.: СПбГУ, 2017. – 69 с.

В учебное пособие включены элементы комбинаторики и начальные сведения, касающиеся понятия вероятности. Рассматриваются также некоторые философские аспекты вероятности. Материал иллюстрируется примерами, рисунками и разнообразными задачами.

Пособие предназначено студентам Института философии СПбГУ, а также может быть использовано студентами нематематических специальностей других факультетов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие базируется на лекциях по математике, которые на протяжении многих лет читаются Н. Б. Шепелявой студентам 1-го курса Института философии СПбГУ, и лекциях по теории вероятностей, которые читались А. З. Веселовской на факультете менеджмента.

Данное пособие является дополнением к учебнику [4] «Математика: логика, множества, отображения. Избранные аспекты в элементарном изложении», который используется студентами Института философии в настоящее время. Мы будем рассматривать элементы комбинаторики и начальные понятия теории вероятностей: случайные события и вероятности событий. Во введении рассказывается о различных определениях вероятности, об истории их возникновения и развития, о связанных с ними логико-философских трудностях. Приложение посвящено описанию некоторых философских аспектов вероятности.

Учитывая, что пособие ориентировано в основном на студентов, не имеющих серьезной математической подготовки, мы рассматриваем вероятности событий для экспериментов с конечным множеством исходов (исключение составляют геометрические вероятности). Изложение ведется достаточно подробно, в доступной форме. Например, доказательства свойств вероятности приведены для случая классического определения вероятности; в главе, посвященной испытаниям Бернулли, дается понятие о законе больших чисел в форме Бернулли и подробно разъясняется его смысл. Материал иллюстрируется примерами, рисунками и задачами с решениями. Ряд задач предлагается для самостоятельного решения, ответы к ним прилагаются. Встречающийся в тексте символ • обозначает конец доказательства.

В учебном пособии используется следующая литература (см. список на стр. 68): во введении – [7; 9; 12; 13], в главе 1 – [2; 3; 5; 6; 11; 14], в главе 2 – [2; 3; 8; 14], в приложении – [1; 9; 10; 12; 13].

Мы очень благодарны Елене и Анне Шемяк за художественные иллюстрации, которые, надеемся, позволят читателям немного расслабиться и улыбнуться.

ВВЕДЕНИЕ

В «Диалогах о математике» выдающегося венгерского математика А. Реньи Сократ задает себе вопрос: «Уж не думаешь ли ты, Сократ, что метод, применяемый математиками при изучении чисел и геометрических фигур, пригоден только для нужд математики? Почему бы тебе не попытаться убедить людей в том, что о чем бы они ни размышляли – о насущных ли проблемах повседневной жизни или о государственном устройстве, – методы мышления остаются по существу такими же, какие применяют в своей области математики?» [12]. Этот вопрос приобретает особый интерес в настоящее время, когда происходит бурный процесс математизации знаний. Отличительной чертой современной науки является возрастание роли вероятностных идей в построении научных теорий, а также возрастание роли вероятностно-статистических методов исследования. Понятие вероятности стало одним из фундаментальных понятий науки, без которого не могут обойтись современная физика, биология, экономика, космология, лингвистика, кибернетика. Теория вероятностей имеет много математических приложений (теория статистических решений, исследование операций, теория информации, теория игр, теория надежности), которые используются в естествознании и технике.

Вот что писал о теории вероятностей французский математик и физик Лаплас (XVIII-XIX вв.) в своем труде «Опыт философии теории вероятностей»: «Теория вероятностей есть в сущности не что иное, как здравый смысл, сведенный к исчислению: она заставляет оценивать с точностью то, что здраво развитые умы чувствуют как бы инстинктом, часто не умея дать себе в этом отчет. Если принять во внимание аналитические методы, которые возникли из этой теории, истинность принципов, служащих ей основанием, утонченную и изящную логику, которой требует применение их к решению задач,… если, затем, заметить, что даже в таких областях, которые не могут быть подчинены исчислению, она дает самые верные взгляды, которые могут нами руководить в наших суждениях, и что она нас учит предохранять себя от иллюзий, которые нас часто сбивают с верного пути, – мы увидим, что нет науки, более достойной наших размышлений, и что было бы очень полезно ввести ее в систему народного просвещения» [7].

В «Письмах о вероятности» А. Реньи приводит слова Паскаля[1]: «Для меня очевидно, что теория вероятностей позволит математическими методами исследовать такие явления природы, которые немыслимо объяснить другими математическими методами; я имею в виду явления, зависящие от случая»[12]. Это высказывание полностью подтверждается современным развитием науки.

Историю проблемы вероятности можно проследить достаточно далеко в прошлое. Аристотель[2] в своей работе «Риторика» так определял вероятность: «Вероятное – то, что случается по большей части, и не просто то, что случает-

[1] Паскаль Блез (1623-1662) – французский философ, математик и физик.
[2] Аристотель (384-322 до н.э.) – древнегреческий ученый.

ся, как определяют некоторые, но то, что может случиться и иначе; оно так относится к тому, по отношению к чему оно вероятно, как общее к частному». В этом определении Аристотель уже делает попытку связать вероятность с категориями необходимости, случайности, возможности, общего и частного. За Аристотелем следует целая плеяда мыслителей, с разных позиций обсуждавших проблему вероятности. Ключевым вопросом этих дискуссий является вопрос «Что такое вероятность?», субъективна она или объективна, и что соответствует этому понятию в объективной действительности.

Различают три подхода к определению вероятности: классический, статистический, аксиоматический.

1. Классическое определение

Классическое определение вероятности восходит к П. Лапласу[3] и Я. Бернулли[4]. Как Лаплас, так и Бернулли были сторонниками господствовавшей в то время идеи однозначной механической детерминированности и предопределенности явлений. В «Опыте философии теории вероятностей» Лаплас писал: «Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движение величайших тел Вселенной наряду с движением легчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором». В такой механистической концепции Вселенной не остается места для существования объективных случайностей, возможностей и вероятностей. Лаплас и Бернулли толковали вероятность как меру обоснованности предположений относительно состояния вещей, как состояние человеческого сознания, обусловленное соотношением знания и незнания о некотором явлении. «Делать о какой-либо вещи предположения, – писал Бернулли, – все равно что измерять ее вероятность… Вероятности оцениваются одновременно и по числу, и по весу доводов, которые как-нибудь указывают или доказывают, что некоторая вещь есть, будет или была» [13].

Лаплас вводит понятие «равновозможных» случаев и определяет вероятность события как отношение числа «благоприятствующих» случаев к числу всех возможных случаев. Это определение получило название «классическое определение вероятности» (см. гл. 1, §3). Такой подход повлек за собой значительные логико-философские трудности, связанные с изменой духу рационализма, господствовавшему в науке: в основу определения было положено не знание, а отсутствие знания; события признавались равновозможными, поскольку неизвестно основание, на котором одно из событий могло бы быть признано более возможным, чем другое. Этот принцип недостаточности знания, или принцип индифферентности, стал основным в классической концепции вероятности и способствовал субъективистскому пониманию вероятности

[3] Лаплас Пьер (1749-1827) – французский математик, физик, астроном.
[4] Бернулли Якоб (1654-1705) – швейцарский математик.

как состояния человеческого ума. При правильной трактовке классическое определение вероятности применимо к очень небольшому классу явлений. Тем не менее, оно сыграло конструктивную роль в становлении новой математической дисциплины – теории вероятностей. Освобожденное от налета субъективизма, это определение, основанное на формально неопределимом понятии равновозможности, сохраняет свою значимость и в наши дни.

2. Статистическое определение

Классическое определение вероятности было впоследствии вытеснено частотным, или статистическим определением (см. гл. 2, §3). Частотная вероятность события определяется как отношение числа интересующих нас исходов события к числу всех исходов в данной серии испытаний, проводящихся при неизменных условиях. Наибольший вклад в развитие частотного подхода к определению вероятности внес Р. Мизес[5]. Однако Мизесу не удалось построить логически непротиворечивую математическую теорию вероятностей из-за трудности, связанной с различием между наблюдаемой относительной частотой события, которая, вообще говоря, меняется с каждой серией испытаний, и вероятностью события, представляющей собой постоянную величину [9]. В «Письмах о вероятности» Паскаль пишет Ферма[6]: «Зависимость вероятности от относительной частоты примерно такая же, как отношение точного и полученного в результате измерений значения плотности. Следовательно, наблюдение относительной частоты можно рассматривать как способ измерения вероятности» [12]. Интересная философская интерпретация частотной вероятности была предложена К. Поппером[7] [9]. Вероятность, с точки зрения Поппера, характеризует тенденцию к осуществлению определенного события при многократном воспроизведении экспериментальной ситуации. В такой интерпретации своеобразно синтезированы понятия виртуальной и актуальной вероятности, то есть представление о вероятности как о возможности, внутренней тенденции и как о наблюдаемой в эксперименте частоте осуществления определенных событий. Однако Поппер не смог выявить, в чем состоит объективное содержание вероятности, чем по существу отличается тенденция, проявляющаяся вероятностно-статистическим образом, от тенденции, проявляющейся строго однозначным образом. Частотное определение вероятности не достигло уровня строгой математической абстракции. Противоречивый характер частотной концепции вероятности показал невозможность дать эмпирическое обоснование теории вероятностей с помощью абстрагирования и идеализации эмпирически наблюдаемого в массовых случайных явлениях.

3. Аксиоматическое определение

Математические и логические затруднения, связанные с проблемой строгого и предельно общего определения понятия вероятности, удалось преодо-

---

[5] Мизес Рихард (1883-1953) – немецкий математик.
[6] Ферма Пьер (1601-1665) – французский математик.
[7] Поппер Карл (1902-1994) – австрийский и британский философ и социолог.

леть лишь на пути аксиоматического построения теории вероятностей. В 1933 году А. Н. Колмогоровым была предложена аксиоматика теории вероятностей, в основу которой были положены теоретико-множественные представления. (Читатели, имеющие достаточную подготовку в области математического анализа, могут ознакомиться с подробным описанием аксиом теории вероятностей в книге [2].) С введением аксиоматики теория вероятностей превратилась в строгую математическую дисциплину, свободную от неявных допущений и логических противоречий. Некоторые авторы усматривают в аксиоматическом подходе «изъян»; например, А. С. Кравец пишет: «Эта стройность и безупречность новой теории была куплена слишком дорогой ценой, по существу ценой полного отказа от каких бы то ни было содержательных представлений о вероятности» [9]. Однако надо иметь в виду, что эти аксиомы в своей основе имеют интуитивные представления о вероятности, а теория множеств используется лишь в качестве математического аппарата, удобного описания понятия вероятности. Более того, обоснование аксиоматики теории вероятностей с позиции теории множеств обеспечило возможность более широкого круга интерпретаций самой вероятности и приложений теории вероятностей [13]. Здесь можно проследить диалектический путь от реальности к абстракции и от абстракции вновь к реальности, уже на более высоком содержательном уровне. Что же касается вопроса о том, что аксиоматическое определение ничего не говорит о «природе» понятия вероятности, то, как замечает Л. В. Смирнов, математика вообще ничего не говорит о природе своих объектов, ибо это не есть проблема, решаемая в рамках математики [13].

Задача установления связи между понятием вероятности и тем, что ему соответствует в реальной действительности, носит философский характер, так как здесь речь идет о раскрытии отношения между идеальным (вероятностными представлениями) и материальным (объективной реальностью, отражаемой в этих представлениях), между объективным и субъективным [9]. Подобной точки зрения придерживался и А. Реньи, называя вопросы взаимосвязи теории вероятностей с окружающим нас миром, применимости и интерпретации этой теории скорее философскими, гносеологическими, чем математическими [12].

Более подробно эти проблемы рассматриваются в приложении «Философские аспекты вероятности».

ГЛАВА 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

§1. Элементы комбинаторики

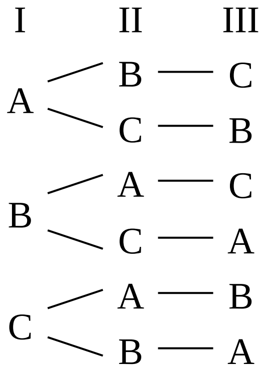
1. Что такое комбинаторика?

Для решения вероятностных задач, если следовать подходу Лапласа, необходимо знать число всевозможных исходов случайного опыта и число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию. Иногда это можно установить непосредственно, пересчитав эти исходы, а иногда непосредственный перебор оказывается весьма трудоемким. Представьте себе ситуацию, когда благоприятными исходами некоторого опыта оказываются такие числа от 0 до 9999, в записи которых нет ни одной цифры 8. Можно, конечно, выписать все числа от 0 до 9999, удалить из списка все числа, содержащие запрещенную цифру, и пересчитать оставшиеся. Ответ на вопрос о числе благоприятных исходов будет получен, но процесс его получения достаточно трудоемок. Приведем еще пример. Рассмотрим лотерею «6 из 49» и попробуем ответить на вопрос: сколькими способами можно извлечь 6 различных чисел из имеющихся 49? Как будет показано позже, прямой перебор будет содержать 13983816 вариантов. Попытки найти способы подсчета числа исходов, не прибегая к их перебору, способствовали развитию комбинаторики. С помощью комбинаторных методов можно, например, легко найти количество автомобильных номеров, состоящих из трех букв и следующих за ними трех цифр, или сосчитать, сколько различных маршрутов может выбрать автомобилист, если ему надо проехать пять кварталов на север и три квартала на восток. Изначально под комбинаторикой понималась наука об общих законах комбинирования и образования различных конфигураций данных объектов. К концу XVIII – началу XIX вв. в связи с потребностями теории вероятностей комбинаторика практически свелась к решению задач о количестве конфигураций с заданными свойствами, то есть к так называемой «перечислительной» комбинаторике. При этом требовалось указать алгоритмы для подсчета этого количества. Именно поэтому одно из популярных определений комбинаторики таково: «Комбинаторика – это область математики, исследующая вопрос о числе комбинаций (конфигураций), которые можно составить из заданных объектов и которые обладают теми или иными свойствами». Подробнее об истории возникновения и развития комбинаторики можно прочесть в [5].

2. Перестановки и размещения

Начнем с простой задачи.

Задача 1. Найти число способов, которыми можно поставить три различные книги (обозначим их A, B, C) на три свободных места на книжной полке.



Решение. Первое место можно заполнить тремя способами (см. рис.). Для каждого из этих трех способов существуют два варианта заполнения второго места. Следовательно, $3 \cdot 2$ – это число способов заполнить первые два места. При заполненных первом и втором местах на третье место может быть поставлена только одна оставшаяся книга. Таким образом, число n различных вариантов расстановки книг можно вычислить по формуле: $n = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

В рассмотренной задаче речь идет о нахождении числа способов, которыми можно переставлять три различные книги на трех местах. Обобщим постановку задачи и способ ее решения.

Возьмем теперь n различных объектов произвольной природы. Условимся далее рассматривать данные объекты как элементы конечного множества, которое составлено из этих объектов. Так в задаче 1 можно будет говорить о множестве {A, B, C}, составленном из трех данных книг.

Определение 1. *Перестановками из n элементов* называются различные расположения этих элементов в определенном порядке.

Пример 1. Множество из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ имеет следующие перестановки: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

Пример 2. Пусть имеется n человек и n кресел с номерами от 1 до n. Любой способ рассадить n человек в n пронумерованных кресел – это перестановка из n элементов.

Число перестановок из n элементов – это число способов, которыми можно расположить n элементов в определенном порядке, или, иначе говоря, число способов разместить n элементов на n местах.

Число перестановок из n элементов обозначается P_n.

Теорема 1 (о числе перестановок). Для числа перестановок P_n справедлива формула

$P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (читается «n факториал»).

Доказательство.

Найдем число способов разместить n различных элементов на n местах. Пронумеруем эти места. Затем на первом месте расположим любой из n имеющихся элементов, на втором – любой из $(n-1)$ оставшихся. Тогда первые два места могут быть заполнены $n(n-1)$ способами. Число способов заполнить первые три места равно числу способов заполнить первые два места, умноженному на число способов заполнить третье место, то есть равно $n(n-1)(n-2)$. Рассуждая аналогично, получим, что число способов заполнить все n мест, разместив на них n различных элементов, равно

$n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1$. Это и означает, что $P_n = n!$ •

Пример 3. Цифры 1, 2, 3, 4, 5 написаны на пяти карточках. Карточки перемешивают и выкладывают в ряд. Найдем количество пятизначных чисел, которые можно таким образом получить. Заметим, что интересующие нас числа образованы путем перестановки данных пяти цифр. Следовательно, можно получить $P_5 = 5! = 120$ различных чисел.

Пример 4. Четыре различные контрольные работы нужно провести в течение четырех учебных дней, проводя в день только по одной работе. Число способов составить расписание контрольных равно числу способов, которыми можно переставлять четыре учебных дня в расписании четырех контрольных работ, то есть равно $P_4 = 4! = 24$.

Задача 2. Найти число способов, которыми можно разместить на трех пронумерованных местах какие-либо три книги из имеющихся пяти различных книг.

Решение. Первое место можно заполнить пятью способами. Для каждого из этих пяти способов существуют четыре варианта заполнения второго места. Поэтому число способов заполнить первые два места равно $5 \cdot 4 = 20$. При заполненных первом и втором местах на последнее место может быть поставлена любая из трех оставшихся книг. Число n различных вариантов расстановки книг можно вычислить по формуле $n = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

В этой задаче рассматриваются различные расположения в определенном порядке (то есть перестановки) нескольких элементов, которые выбираются из данного множества.

Определение 2. *Размещениями из n элементов по k* $(k \leq n)$ называются всевозможные перестановки любых k элементов, выбранных из данных n элементов.

Замечание. Перестановки из n элементов можно рассматривать как размещения из n элементов по n.

Пример 5. Пусть имеется n человек и k кресел с номерами от 1 до k $(k \leq n)$. Любой способ выбрать k человек из присутствующих n человек и рассадить их в k пронумерованных кресел – это размещение из n элементов по k.

Число размещений из n элементов по k – это число способов, которыми можно выбрать k элементов из данных n элементов и расположить их в определенном порядке. Число размещений из n элементов по k будем обозначать A_n^k.

В задаче 2 мы нашли число размещений из 5 элементов по 3.

Теорема 2 (о числе размещений). Для числа размещений A_n^k имеет место формула

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Доказательство.

Найдем число способов выбрать k элементов из данных n элементов и разместить их на k местах. Пронумеруем эти места. На первом месте можно расположить любой из n имеющихся элементов, на втором – любой из $(n-1)$

оставшихся. Значит, первые два места могут быть заполнены $n(n-1)$ способами. Число способов заполнить первые три места будет равно числу способов заполнить первые два места, умноженному на число способов заполнить третье место, то есть будет равно $n(n-1)(n-2)$. Рассуждая аналогично, получим, что число способов заполнить все k мест равно $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))$. Это и означает, что $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$. Для краткости запишем данную формулу через факториалы:

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)=$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\ldots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}\,\bullet$$

Пример 6. Рассматриваются всевозможные трехзначные числа, в записи которых использованы только цифры 1,2,3,4,5,6 , причем в каждом числе все цифры различны. Найдем количество таких чисел. В данном случае из 6 цифр нужно выбирать по 3 цифры и располагать их в определенном порядке, то есть составлять размещения из 6 элементов по 3; их число равно $A_6^3 = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$.

Пример 7. Четыре различные контрольные работы нужно провести в течение шести учебных дней, проводя в день не более одной контрольной. Число способов составить расписание равно числу способов из 6 учебных дней выбрать 4 и расположить их в определенном порядке, где первая дата соответствует проведению 1-й контрольной, 2-я – второй и т.д. Таким образом, число различных вариантов расписания будет равно $A_6^4 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$.

Обратим внимание, что в перестановках и в размещениях не допускалось повторение элементов. Далее рассмотрим ситуации, в которых это ограничение отсутствует.

Задача 3. Предположим, имеется не менее трех экземпляров каждой из трех различных книг (экземпляры одной книги считаем неразличимыми). Из этих книг последовательно выбирают три книги и ставят их соответственно на первое, второе и третье места на книжной полке. Сколько различных вариантов заполнения книгами трех мест на полке можно таким образом получить?

Решение. На первом месте может оказаться экземпляр любой из трех данных книг, на втором – снова может быть экземпляр любой из трех книг. Поэтому число способов заполнить первые два места равно $3\cdot 3 = 9$. При заполненных первом и втором местах на последнее место тоже может быть поставлен экземпляр любой из трех книг. Следовательно, число n различных вариантов расстановки книг можно вычислить по формуле: $n = 3\cdot 3\cdot 3 = 3^3 = 27$.

Задача 4. Сколько существует трехзначных чисел, не содержащих в своей записи а) ни одного нуля? б) ни одного нуля и ни одной цифры восемь?

Решение. а) На первом месте может стоять любая из девяти цифр (ноль исключается). Так как цифры в записи чисел могут повторяться, на втором месте снова может быть любая из тех же девяти цифр. Тогда число способов заполнить первое и второе места равно $9\cdot 9 = 81$. При этом и на третье место может быть поставлена любая из девяти цифр. Следовательно, искомое количество трехзначных чисел будет равно $n = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729$.

б) Рассуждая аналогично, но делая выбор не из девяти, а из восьми возможных цифр, получаем $n = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 = 512$.

Задача 5. В ящике находятся 15 шаров с номерами от 1 до 15. Из ящика вынимают наугад один шар, записывают его номер и возвращают шар обратно в ящик. Описанная процедура повторяется 4 раза. Сколько различных последовательностей из четырех номеров можно таким образом получить?

Решение. Первый вынутый шар может иметь любой номер от 1 до 15, то есть, существует 15 вариантов для первого записанного номера. Так как вынутый шар возвращают обратно, эксперимент повторяется при неизменных условиях. Значит, каждый следующий шар также может иметь любой из 15 возможных номеров. Следовательно, можно получить $n = 15^4 = 50625$ различных последовательностей из четырех номеров.

Замечания.

1) В общем случае, когда в ящике находятся m шаров, а процедура выбора и возвращения шара повторяется k раз, число различных последовательностей номеров будет равно m^k. Описанную модель иногда называют «выбором с возвращением».

2) В теории вероятностей используется также математическая модель, в которой k различимых (пронумерованных) шаров размещают по m различимым (пронумерованным) ящикам. Последовательно фиксируя номера выбираемых ящиков (сначала номер ящика для первого шара, затем для второго и т.д.), будем получать упорядоченные наборы (последовательности) из k номеров. Если допускается расположение нескольких шаров в одном ящике, то номера в наборах могут повторяться, и тогда говорят о «размещениях с повторениями». Так же, как при выборе с возвращением, в этом случае получим m^k различных последовательностей из k номеров. Если же в каждом ящике должно быть не более одного шара, то все номера в наборах будут различны, и мы будем иметь размещения из m по k.

3) Обратим внимание на то, что в моделях выбора с повторениями и размещений с повторениями m и k – это любые натуральные числа, в то время как в размещениях из m по k должно быть $k \le m$.

Пример 8. Три различные контрольные работы требуется провести в течение пяти учебных дней. Если нет ограничения на количество контрольных, проводимых в один день, то дни в расписании контрольных работ могут повторяться, и число способов составить расписание будет равно $5^3 = 125$.

3. Правило умножения (основной принцип комбинаторики)

Обобщением подхода, с помощью которого были решены рассмотренные задачи, является следующее утверждение.

Правило умножения [11].

Пусть необходимо выполнить одно за другим какие-либо k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после чего второе действие можно выполнить n_2 способами, после чего третье действие можно выполнить n_3 способами и так далее до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Заметим, что при подсчете числа перестановок и числа размещений количество способов выполнить каждое последующее действие было на единицу меньше, чем число способов выполнить предыдущее действие. Для перестановок процесс заканчивался, когда оставался единственный способ выполнить действие (см. задачу 1), а для размещений – когда достигалось заданное количество действий (см. задачу 2). В общем же случае при использовании правила умножения число возможных способов выполнить то или иное действие (в данной последовательности действий) и само количество действий зависят от смысла задачи. Так, в каждой из задач 3 – 5 для всех выполняемых действий число способов постоянно, а количество действий определяется условием задачи.

Пример 9 [5]**.** Команда космического корабля состоит из командира, бортинженера и врача. На место командира претендуют 4 человека, на место бортинженера – 3, а на место врача – 5 человек. Количество различных команд, которые можно составить из указанного числа претендентов, равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Пример 10. В России автомобильные номера кроме номера региона содержат три буквы алфавита и три цифры. Найдем число возможных номеров в регионе, если используется 29 букв и 10 цифр. Так как порядок букв важен и буквы могут повторяться, то число способов сформировать буквенную часть равно $29^3 = 24389$. Рассуждая аналогично, определим, что количество способов сформировать цифровую часть равно $10^3 = 1000$. По правилу умножения число всевозможных номеров

$$n = 24389 \cdot 1000 = 24389000.$$

Задача 6 [5]**.** Рассматриваются всевозможные трехзначные числа, не содержащие в записи ни одной цифры 8.

а) Сколько таких чисел существует?

б) Сколько среди них четных чисел?

Решение.

а) Воспользуемся правилом умножения. Так как трехзначное число не может начинаться с нуля, первый элемент (число сотен) выбираем из множества $\{1,2,3,4,5,6,7,9\}$. Далее, как второй, так и третий элементы выбираем из множества $\{0,1,2,3,4,5,6,7,9\}$. В первом множестве восемь элементов, во втором – девять. Количество интересующих нас чисел будет равно $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$.

б) В условиях задачи четное число может оканчиваться цифрами 0, 2, 4, 6. Поэтому первый элемент выбираем из восьми, второй – из девяти, а третий –

из четырех возможных цифр. Количество четных трехзначных чисел, не содержащих в своей записи ни одной цифры 8, равно $8 \cdot 9 \cdot 4 = 288$.

Задача 7. Рассматриваются всевозможные трехзначные числа, в записи которых использованы только цифры 1,2,3,4,5,6.

а) Сколько таких чисел существует?

б) Сколько среди них чисел, в которых все цифры различны?

в) Сколько среди них нечетных чисел?

Решение.

а) Применим правило умножения. Первый элемент (число сотен) выбираем из шести возможных цифр. Далее, как второй, так и третий элементы также выбираем из шести возможных. Количество интересующих нас чисел будет равно $6^3 = 216$.

Заметим, что при решении данной задачи прослеживается аналогия с моделью выбора с возвращением.

б) По условию все цифры в трехзначных числах различны. Это означает, что составляются размещения из шести элементов по три. Их число

$A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

в) На позициях сотен и десятков могут быть любые упорядоченные пары, составленные из данных шести цифр, причем элементы в каждой паре могут повторяться. Число таких пар равно $6^2 = 36$. На позиции единиц могут быть только три цифры 1,3,5. По правилу умножения всего можно составить $3 \cdot 36 = 108$ нечетных чисел.

Задача 8. Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 написаны на шести карточках. Карточки перемешивают и выкладывают в ряд.

а) Сколько среди них чисел, начинающихся с единицы?

б) Сколько среди них четных чисел?

Решение.

а) На первом месте должна стоять цифра 1. На остальных пяти местах должны стоять цифры 2, 3, 4, 5, 6 в произвольном порядке. Существует P_5=5! перестановок этих цифр. Следовательно, можно получить 5!=120 чисел, начинающихся с единицы.

б) Начнем с последней цифры. На последнем месте могут стоять цифры 2, 4, 6, то есть существует 3 способа заполнения последнего места. Для каждого из этих способов существует 5! способов заполнения первых пяти мест (число перестановок из оставшихся пяти цифр). Таким образом, получаем 3·5!=360 четных чисел.

Задача 9. Для приготовления пиццы имеются в наличии следующие продукты: сыр, помидоры, баклажаны, лук, перец, мясной фарш и грибы. Сколько различных видов пиццы можно приготовить, если кроме сыра использовать не менее одного из перечисленных продуктов?

Решение.

Кроме сыра имеется еще 6 продуктов, для каждого из которых существует две возможности: он либо добавляется в пиццу, либо нет. Всего получается $2^6 = 64$ варианта использования каких-либо продуктов из данных шести. Так как по условию хотя бы один продукт должен быть добавлен, надо исключить тот случай, когда не используется ни один из шести продуктов. Таким образом, число различных видов пиццы будет равно 64–1= 63.

Следует заметить, что при решении задач с помощью правила умножения мы сами выбираем, какое именно действие будем считать первым, какое – второым и т.д. Порядок выполнения действий определяется удобством подсчета числа способов выполнения соответствующих действий. Например, в пункте а) задачи 8 мы начинали подсчет с первой цифры, а в пункте б) – с последней.

4. Сочетания

Определение 3. *Сочетаниями из n элементов по k* называются различные неупорядоченные наборы из k элементов, выбранных из данных n элементов.

С точки зрения теории множеств происходит следующее: из множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ выбираем всевозможные подмножества, состоящие из k элементов. Эти подмножества и называются сочетаниями из n элементов по k.

Пример 1. Выпишем все сочетания из трех элементов {○, □, Δ} по 2:
{○, □ }, {□, Δ}, {○, Δ}.

Пример 2. Имеются 4 книги A, B, C, D, из которых можно взять для чтения две. Возможные варианты выбора: {A, B}; {A, C}; {A, D}; {B, C}; {B, D}; {C, D}. Это и есть сочетания из 4 элементов множества {A, B, C, D} по 2, то есть все подмножества данного множества, состоящие из двух элементов.

Число сочетаний из n элементов по k – это число способов, которыми можно выбрать k элементов из данных n элементов (если порядок элементов нас не интересует). Число сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k.

Возвращаясь к трактовке сочетаний как подмножеств данного конечного множества, можно сказать, что C_n^k – это количество подмножеств с числом элементов k, которые имеет множество, состоящее из n элементов.

В примерах 1 и 2 мы с помощью непосредственного перебора получили, что $C_3^2 = 3$, а C_4^2=6.

Теорема 3 (о числе сочетаний). Для числа сочетаний C_n^k справедлива формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Доказательство.

Как следует из определения, сочетания из n элементов по k – это неупорядоченные наборы, состоящие из k элементов. Таким образом, в одно сочетание объединяются те упорядоченные наборы (то есть размещения), которые могут быть получены друг из друга перестановкой; их число равно P_k. Поэтому

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \bullet$$

Задача 10. В шахматном турнире участвуют 8 школьников. Каждый участник должен сыграть с каждым одну партию. Сколько партий сыграно в турнире?

Решение. Количество партий равно количеству различных пар участников турнира, то есть $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$.

Задача 11.

а) Сколькими способами из 7 книг можно отобрать 4?

б) Сколькими способами это можно сделать, если в число отобранных должна входить одна определенная книга?

в) Сколькими способами из 7 книг можно отобрать 4 и поставить их на 4 места на книжной полке?

Решение.

а) Число способов из 7 книг отобрать 4 – это $C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$.

б) Если в число отобранных должна входить одна определенная книга, значит, остается отобрать три книги из оставшихся шести, то есть получаем $C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$ способов.

в) В п. а) мы получили, что число различных наборов из четырех книг – это $C_7^4 = 35$. Для каждого такого набора существует P_4=4! способов расставить эти книги на книжной полке. Следовательно, всего получим $35 \cdot 4! = 840$ способов.

Замечание. Ответ на вопрос п. в) можно также получить, используя формулу для числа размещений: $A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = 840$.

Задача 12. Сколькими способами можно разместить три одинаковых предмета в пяти пронумерованных ящиках при условии, что в каждом ящике может находиться не более одного предмета?

Решение.

При заданном условии число способов разместить три одинаковых предмета в пяти ящиках равно числу способов выбрать три ящика из пяти, то есть равно числу сочетаний из 5 по 3:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = 10.$$

Задача 13. Сколькими способами можно из 49 различных шаров извлечь 6, если порядок, в котором были извлечены шары, безразличен.

Решение.

Число способов извлечь 6 шаров из 49 равно

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6!\,(49-6)!} = \frac{43!\cdot 44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{6!\,43!} = 13983816.$$

Задача 14.[11] Сколькими способами можно составить комиссию из трех человек, выбирая их среди четырех женщин и четырех мужчин, если

а) в комиссию могут входить любые три человека из данных восьми?

б) комиссия должна состоять из двух женщин и одного мужчины?

Решение.

а) Число способов из 8 человек выбрать троих – это $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$.

б) Число способов выбрать двух женщин из 4 равно $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ Для каждого варианта выбора двух женщин существует 4 варианта образовать комиссию, выбрав любого из четырех мужчин. Всего получим $C_4^2 \cdot C_4^1 = 6\cdot 4 = 24$ способа.

Задача 15. В урне находятся 6 белых и 4 красных шара. Наудачу извлекают 5 шаров, среди которых оказывается ровно 3 белых. Найдите число способов получить такой набор.

Решение.

Будем считать все белые шары различимыми (пронумерованными). Тогда число способов извлечь 3 белых шара из 6 равно числу способов выбрать 3 предмета из 6, то есть C_6^3. Остальные два шара должны быть красными. Рассуждая аналогично, получим, что число способов извлечь 2 красных шара из 4 равно C_4^2. По правилу умножения число способов извлечь 3 белых и 2 красных шара равно произведению

$$C_6^3 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} \cdot \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 120.$$

Задача 16 [5]**.** Сколько различных «машинных» слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»? Под термином «машинное» слово понимается любая (необязательно имеющая смысл) последовательность букв.

Решение.

Занумеруем места, на которых будут располагаться буквы. Из десяти мест выбираем три места, на которых будут стоять буквы «а». Это можно сделать

C_{10}^3 способами. Затем из оставшихся семи мест C_7^2 способами выбираем два места, на которые ставим буквы «м», из оставшихся пяти мест C_5^2 способами выбираем два для букв «т», а затем определяем места для «е», «и» и «к» соответственно C_3^1, C_2^1 и C_1^1 числом способов. По правилу умножения число различных слов равно произведению

$$C_{10}^3 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 151200.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1.1. Доказать, что число 3-буквенных слов, которые можно образовать из слова «гипотенуза», равно числу всевозможных перестановок букв слова «призма». (Под словом понимается любая последовательность букв).

Задача 1.1.2. Сколько 5-значных чисел можно составить, используя цифры 1, 2,…,7 без повторений? Сколько будет таких четных чисел?

Задача 1.1.3. Сколько существует различных способов выложить все карты колоды (52 карты) в ряд так, чтобы

а) последней картой была дама?

б) первая карта была червовой масти?

Задача 1.1.4. Студенту необходимо сдать 4 экзамена в течение 10 дней. Сколькими способами можно составить расписание?

Задача 1.1.5. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 1.1.6. В барабане из 20 лотерейных билетов 4 выигрышных. Сколькими способами можно извлечь из барабана 6 билетов, среди которых окажется ровно два выигрышных?

Задача 1.1.7 [2]**.** Сколько различных «машинных» слов можно получить, переставляя буквы в слове «колокол»?

§2. Случайные события

1. Случайный эксперимент. Исходы эксперимента

Случайный эксперимент – это эксперимент, который может закончиться одним из совокупности известных результатов, но до осуществления эксперимента неизвестно, каким именно. Различные взаимно исключающие (то есть такие, которые не могут произойти одновременно) результаты эксперимента называют исходами.

Примеры.

а) Подбрасывание монеты. В этом эксперименте 2 исхода: выпадение герба (Г) и выпадение решетки (Р).

б) Бросают игральную кость. Здесь мы имеем 6 исходов: выпадение 1, 2, …, 6.

в) Наугад вынимают одну карту из колоды, содержащей 52 карты. В этом случайном эксперименте 52 исхода.

Примечание. В дальнейшем всегда будем рассматривать колоду из 52 игральных карт (по 13 карт каждой масти: от двойки до туза).

2. Определение события

2.1. Пространство элементарных событий.

Исходы эксперимента называют также *элементарными событиями*.

Определение. Множество всех исходов эксперимента называется *пространством элементарных событий.*

Пространство элементарных событий обозначается Ω.

Примеры.

а) Подбрасывание монеты; $\Omega = \{\Gamma, P\}$.

б) Бросание игральной кости; $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

в) Наугад вынимают одну карту из колоды; Ω={все карты колоды}.

Замечание. Пространство элементарных событий может быть бесконечным множеством. Например, нить длиной 1 м тянут за концы, и происходит разрыв в случайной точке с координатой $x \in [0;1]$. В данном случае Ω – это отрезок [0;1], то есть бесконечное множество.

2.2.События.

Определение. Любое множество исходов эксперимента называется *событием (случайным событием)*.

События обозначаются большими латинскими буквами: A, B, C, …

Примеры.

а) Бросание игральной кости. Событие A={выпадение четного числа} состоит из трех исходов, то есть A={2, 4, 6}. Событие B={выпадение 3} состоит из одного исхода.

б) Наугад вынимают одну карту из колоды. Событие A={выпадение валета} состоит из четырех исходов, событие B={выпадение крестовой масти} – из 13 исходов, событие C={выпадение червовой шестерки или бубнового туза} – из двух исходов.

Говорят, что *событие* A *наступило*, если в результате эксперимента осуществился исход, принадлежащий событию A.

Например, в эксперименте с игральной костью рассмотрим событие A={выпадение четного числа}. Предположим, выпадает 2. Значит, событие A наступило.

2.3. Достоверное событие.

Определение. Событие Ω, состоящее из всех исходов эксперимента, называется *достоверным* событием.

Будем изображать достоверное событие в виде прямоугольника (рис.2).

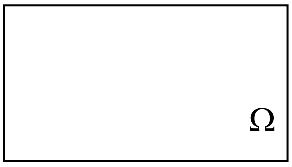


Рис. 2

Достоверное событие обязательно наступает.

Примеры.

а) Бросание игральной кости. Событие {выпадение числа, большего или равного 1}=Ω - это достоверное событие.

б) Наугад вынимают одну карту из колоды. Достоверным будет событие {выпадение карты либо красной, либо черной масти}=Ω.

<u>2.4. Невозможное событие.</u>

Определение. *Невозможное* событие – это событие, которому не принадлежит ни один из исходов (пустое множество исходов).

Такое событие не может произойти в результате данного эксперимента.

Невозможное событие обозначается $\varnothing$.

Примеры.

а) Бросание игральной кости. Здесь {выпадение числа, большего или равного 7}=$\varnothing$.

б) Наугад вынимают одну карту из колоды. В этом эксперименте {выпадение карты младше двойки}=$\varnothing$.

3. Соотношение между событиями вида «А влечет В»

Определение. Говорят, что *событие А влечет событие В (А входит в В)*, если все исходы события А принадлежат событию В.

Для соотношения «А влечет В» используется обозначение $A \subset B$. Графическая иллюстрация приведена на рис. 3.

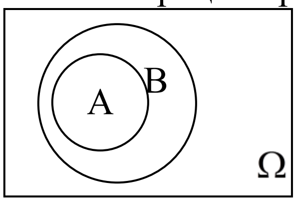


Рис. 3

«$A \subset B$» означает: если происходит событие А, то происходит и событие В.

Пример 1. Бросают игральную кость. Рассмотрим следующие события:

А={выпадение 2}, В={выпадение четного числа},

С={выпадение 4 или 6}.

Какие соотношения между событиями имеют место? Очевидно, что $A \subset B$ и $C \subset B$.

Пример 2. Студент сдает экзамен. Результатом этого случайного эксперимента является оценка. Пространство элементарных событий Ω={2, 3, 4, 5}. Рассмотрим события А={студент получит 4 или 5} и D={студент сдаст экзамен}. Ясно, что А влечет D ($A \subset D$).

4. Операции над событиями

4.1. Сумма событий.

Определение. *Сумма (объединение)* событий A и B – это событие, состоящее из всех исходов, принадлежащих хотя бы одному из событий A , B.

Для суммы событий используется обозначение A+B. Графическая иллюстрация приведена на рис. 4.

A+B

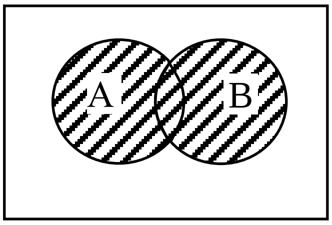


Рис. 4

Событие A+B наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий A , B (то есть, либо наступает только событие A, либо только событие B, либо они наступают одновременно).

Замечание. Можно рассматривать сумму любого числа событий.

Пример 1. Бросают игральную кость. Рассмотрим события

A={выпадение 2}, B={выпадение четного числа}, C={выпадение 4 или 6}, D={выпадение нечетного числа}.

Найдем некоторые суммы событий: A+B=B; A+C=B;
A+D={1, 2, 3, 5}={выпадение либо 2, либо нечетного числа}, B+D=Ω (достоверное событие).

Пример 2. Студент сдает экзамен. Рассмотрим события

A={получена оценка 4 или 5}; B={получена оценка 3 или 4}, C={получена оценка 2 или 3}.

Запишем суммы событий:

A+B={студент получит или 3, или 4, или 5}={студент сдаст экзамен};

A+C=Ω; B+C={получена оценка не выше 4}.

4.2. Произведение событий.

Определение 1. *Произведение (пересечение)* событий A и B – это событие, состоящее из всех исходов, которые входят одновременно и в A, и в B.

Для произведения событий используется обозначение AB. Графическая иллюстрация приведена на рис.5.

AB

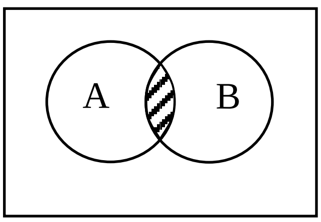


Рис.5.

Событие AB наступает тогда и только тогда, когда наступают одновременно и событие A, и событие B.

Замечание. Можно рассматривать произведение любого числа событий.

Определение 2. События A и B называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно, то есть $AB=\varnothing$.

Графическая иллюстрация для несовместных событий приведена на рис. 6.

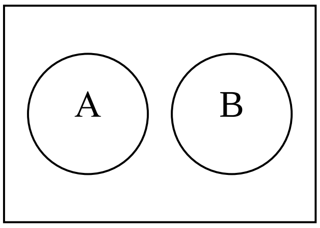


Рис.6

Пример 1. Бросают игральную кость (см. условие примера 1 в п.4.1). Найдем некоторые произведения событий:

$AB=A$; $AC=\varnothing$ (то есть, A и C – это несовместные события); $AD=\varnothing$; $BC=C$.

Пример 2. Студент сдает экзамен (см. условие примера 2 в п. 4.1). Запишем произведения событий:

AB={получена оценка 4}; $AC=\varnothing$ (то есть события A и C несовместны); BC={получена оценка 3}.

4.3. Разность событий.

Определение. *Разность* событий A и B – это событие, состоящее из всех исходов, которые входят в A, но не входят в B.

Для разности событий используется обозначение A–B. Графическая иллюстрация приведена на рис. 7.

A–B

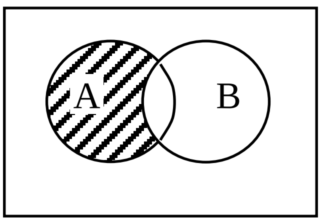


Рис.7

Событие A–B происходит тогда и только тогда, когда событие A происходит, а событие B при этом не происходит.

Пример 1. Бросают игральную кость (см. условие примера 1 в п. 4.1). Найдем некоторые разности событий:

$A–B=\varnothing$; $A–C=A$; $A–D=A$; $B–A=C$; $C–A=C$.

Пример 2. Студент сдает экзамен (см. условие примера 2 в п.4.1). Запишем разности событий:

A–B={получена оценка 5}; A–C=A; B–A={получена оценка 3}; C–A=C.

4.4. Противоположное событие (дополнение).

Определение. Событие, *противоположное* событию А (*дополнение* события А) – это событие, состоящее из всех исходов, которые не входят в А. Для противоположного события используется обозначение $\overline{A}$. Графическая иллюстрация приведена на рис.8.

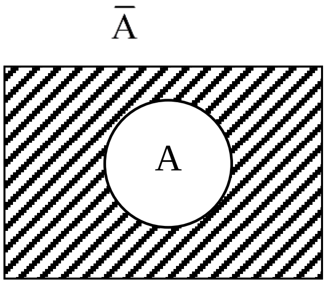


Рис. 8

Событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда событие А не происходит.

Пример 1. Бросают игральную кость (см. условие примера 1 в п. 4.1). Выпишем противоположные события :

$\overline{A}$ ={выпадение любого числа кроме 2}={1, 3, 4, 5, 6};

$\overline{B}=D$; $\overline{C}$ ={выпадение либо 2, либо нечетного числа}={1, 2, 3, 5}; $\overline{D}=B$.

Пример 2. Студент сдает экзамен (см. условие примера 2 в п.4.1). Противоположные события: $\overline{A}=C$; $\overline{B}$ ={получена оценка 2 или 5}; $\overline{C}=A$.

5. Полная группа событий

Дадим два эквивалентных определения.

Определение 1. События H_1, H_2, …H_n образуют *полную группу* событий, если они попарно несовместны и в сумме дают достоверное событие, то есть,
$$\sum_{k=1}^{n} H_k = \Omega .$$

Пояснение. События попарно несовместны, если любые 2 из этих событий несовместны, то есть $H_i H_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Графическая иллюстрация полной группы событий для *n*=5 приведена на рис. 9.

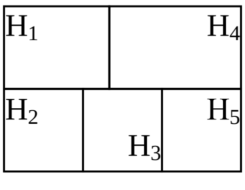


Рис. 9

Определение 2. События H_1, H_2, …H_n образуют полную группу событий, если в результате эксперимента происходит одно и только одно из этих событий (либо H_1, либо H_2, …, либо H_n).

Пример 1. Бросают игральную кость (см. условие примера 1 в п. 4.1). События B и D образуют полную группу, так как всегда выпадает либо четное, либо нечетное число. События A, C, D также являются полной группой событий, поскольку они попарно несовместны и $A+C+D=\Omega$.

Пример 2. Студент сдает экзамен (см. условие примера 2 в п. 4.1). События A и C – это полная группа событий.

Замечание. Пусть A – это любое событие. Тогда A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий (так как в результате эксперимента происходит либо A, либо $\overline{A}$).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.2.1

Бросают игральную кость. Рассмотрим события:
A={выпало нечетное число}, B={выпало число, не превосходящее 4}.

Описать следующие события и указать количество исходов в каждом из них:

$A+B$, $A-B$, $\overline{AB}$, $\overline{A}+B$.

Задача 1.2.2

Имеется 4 изделия. Рассмотрим события:
A={хотя бы одно изделие бракованное }, B={бракованных изделий не меньше двух }.

Описать следующие события:

$A+B$, AB, $\overline{A}$, $\overline{B}$, A-B, B-A.

Задача 1.2.3

Из колоды вынимают 2 карты (без учета порядка). Сколько исходов в событии

а) одна из карт черной масти, а другая красной масти?

б) одна из карт младше 10, а другая старше 10?

Задача 1.2.4

Из карточной колоды вынимают одну карту. Событие A означает, что выпал король, событие B – карта красной масти.

Описать следующие события и указать количество исходов в каждом из них:

$A+B$, AB, $A-B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$.

§3. Вероятность события

Вероятность события характеризует шанс появления этого события. Этот шанс выражается долей от единицы, то есть вероятность любого события – это число, заключенное между нулем и единицей. За единицу принимают вероятность достоверного события, а вероятность невозможного события полагают равной нулю.

1. Классическое определение вероятности

Рассмотрим случайный эксперимент с n исходами. Предположим, все исходы равновозможны, то есть имеют одинаковый шанс осуществиться.

Примеры.

а) Подбрасывание монеты. В этом эксперименте 2 равновозможных исхода.

б) Бросание игральной кости. Здесь 6 равновозможных исходов.

в) Из партии, содержащей 500 деталей, для контроля выбирается наугад одна деталь. В данном случае мы имеем 500 равновозможных исходов.

Предположим, событие А состоит из m исходов. Эти m исходов называются *благоприятствующими* событию А. Например, если в эксперименте с игральной костью рассмотреть событие А={выпадение четного числа}, то исходы {2}, {4}, {6} будут благоприятствующими событию А.

Определение. *Вероятность* события А – это число $\frac{m}{n}$, то есть отношение числа исходов, благоприятствующих событию А, к числу всех возможных исходов.

Это определение называют классическим определением вероятности. Оно применимо только к эксперименту с конечным числом равновозможных исходов.

Вероятность события А обозначается $\mathrm{P}(\mathrm{A})$. Таким образом, в случае равновозможных исходов

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{m}{n}.$$

Задача 1. В полученной партии деталей оказалось 20 деталей первого сорта, 100 деталей второго сорта и 50 деталей третьего сорта. Наудачу вынимается одна из деталей. Найти вероятности получить деталь первого, второго и третьего сорта.

Решение. Рассмотрим события A_1={выбранная деталь первого сорта}, A_2={выбранная деталь второго сорта}, A_3={выбранная деталь третьего сорта}. Количество исходов эксперимента n= 200+100+50=350. Событию A_1 благоприятствуют 200 исходов, событию A_2 – 100 исходов, событию A_3 – 50 исходов. Следовательно, $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)=\frac{200}{350}=\frac{4}{7}$; $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)=\frac{100}{350}=\frac{2}{7}$; $\mathrm{P}(\mathrm{A}_3)=\frac{50}{350}=\frac{1}{7}$.

Задача 2. Номера легковых автомобилей в Финляндии состоят из трех букв латинского алфавита и трех цифр. Какова вероятность, что номер первого встретившегося в Хельсинки автомобиля с финским номером

а) не содержит букв k, s, t, а последняя цифра в номере – 5?

б) содержит три различные буквы, а первая цифра номера – четная?

Решение.

Каждая из трех букв номера машины может совпадать с любой из 26 букв латинского алфавита, а каждая из трех цифр – с любой из 10 цифр. Значит, общее число исходов $n=26^3\cdot 10^3$. Пусть A_1 и A_2 – события, описанные в пунктах а) и б) соответственно.

Исход будет благоприятствовать событию A_1, если каждая буква номера совпадет с какой-либо из 23 оставшихся букв (поскольку буквы k, s, t исключаются), первые две цифры будут любыми, а третья цифра – это 5. Следовательно, число благоприятствующих исходов в данном случае равно $m_1 = 23^3 \cdot 10^2$. Тогда

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{m_1}{n} = \left(\frac{23}{26}\right)^3 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}07.$$

В исходах, составляющих событие A_2, все буквы должны быть различными, поэтому событию A_2 будут благоприятствовать только те исходы, при которых на первом месте стоит любая из 26 букв латинского алфавита, на втором месте – любая буква кроме той, которая стоит на первом месте (25 различных вариантов), а на третьем месте – любая буква кроме тех, которые стоят на первых двух местах (24 варианта). Таким образом, число вариантов записи трех различных букв в номере автомобиля равно $26 \cdot 25 \cdot 24$. Далее, для первой цифры номера имеется 5 вариантов (это четные цифры 0, 2, 4, 6, 8), а вторая и третья цифры могут быть любыми. Следовательно, число благоприятствующих исходов для события A_2 равно $m_2 = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 5 \cdot 10^2$, а тогда

$$\mathrm{P}(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 5 \cdot 10^2}{26^3 \cdot 10^3} = \frac{25 \cdot 3}{13^2} = \frac{75}{169} \approx 0{,}44.$$

Задача 3. Три женщины и четверо мужчин выстраиваются в очередь для прохождения паспортного контроля. Найти вероятность того, что первой и последней в этой очереди оказались женщины, причем никакие две женщины не стоят друг за другом.

Решение.

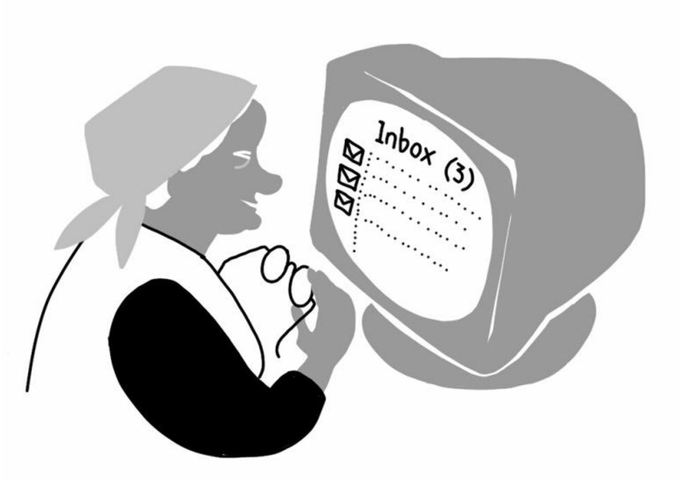
Семь человек могут выстроиться в очередь 7! способами, то есть, общее количество исходов $n = 7!$ Сосчитаем благоприятствующие исходы. Первой в очереди может оказаться любая из трех женщин, то есть, существует три способа занять первое место в очереди. Для каждого из этих способов остается два способа занять последнее место одной из женщин. Далее, по условию женщины не должны стоять друг за другом. Следовательно, из оставшихся пяти свободных мест третья женщина может занять одно из трех мест. Значит, существует $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ способов расположения трех женщин в очереди. Для каждого из этих способов существует 4! способов расположения четырех мужчин на оставшихся четырех местах. Таким образом, число благоприятствующих исходов $m = 18 \cdot 4!$, а искомая вероятность будет равна

$$\mathrm{P} = \frac{m}{n} = \frac{18 \cdot 4!}{7!} = \frac{18}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{3}{35}.$$

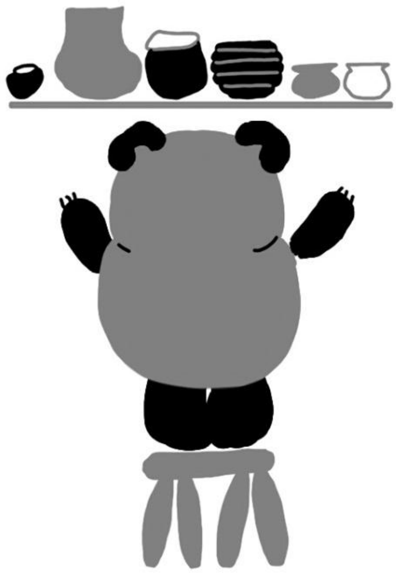
Задача 4. Имеется три письма и пять адресов электронной почты. Для каждого из этих писем выбирают наугад адрес (из данных пяти) и отправляют письмо на этот адрес. Какова вероятность, что все письма получит один и тот же адресат?

Решение.

Существует 5 вариантов выбора адреса для первого письма, 5 вариантов – для второго и 5 вариантов для третьего. Следовательно, всего вариантов рассылки писем будет $5^3 = 125$. Благоприятствующими являются те исходы, при которых все письма посылаются либо на первый адрес, либо на второй, …, либо на пятый, то есть, всего 5 благоприятствующих исходов. Значит, искомая вероятность равна $\frac{5}{125}=\frac{1}{25}$.



Задача 5.[8] Винни-Пух ставит на полку пустые горшочки из-под меда вперемешку с полными, чтобы вид уменьшающегося числа горшочков с медом не портил ему настроение. В данный момент на полке находятся 5 горшочков с медом и 4 пустых. Винни-Пух берёт с полки наугад 3 горшочка. Какова вероятность, что 2 горшочка окажутся с медом, а один - пустой?



Решение.

Всего на полке 9 горшочков, из которых Винни выбирает 3. Значит, общее число исходов $n=C_9^3$. Благоприятствующие – это те исходы, при которых 2 горшочка будут выбраны из 5 полных горшочков, а один горшочек – из 4 пустых. Следовательно, число благоприятствующих исходов $m=C_5^2\cdot C_4^1$, а искомая вероятность будет равна

$$\mathrm{P}=\frac{m}{n}=\left(\frac{C_5^2\cdot C_4^1}{\mathrm{C}_9^3}\right)=\frac{5!\cdot 4\cdot 3!\cdot 6!}{2!\cdot 3!\cdot 9!}=\frac{5!\cdot 2}{7\cdot 8\cdot 9}=\frac{10}{21}.$$

2. Свойства вероятности

1) Вероятность достоверного события.

$\mathrm{P}(\Omega)=1.$

Доказательство. Все n исходов благоприятствуют событию Ω. Поэтому $\mathrm{P}(\Omega)=\frac{n}{n}=1.$ •

2) Вероятность невозможного события.

[8] Это вариация задачи из «Первоапрельского задачника по теории вероятностей» Н. Я. Сотниковой.

$P(\varnothing)=0$.

Доказательство. Для невозможного события нет благоприятствующих исходов. Следовательно, $P(\varnothing)=\frac{0}{n}=0$. •

3) Границы возможных значений для вероятности.

Для любого события А $0\le P(A)\le 1$.

Доказательство. $P(A)=\frac{m}{n}$, причем $0\le m\le n$. Значит, $0\le\frac{m}{n}\le 1$, то есть $0\le P(A)\le 1$. •

4) Если $A\subset B$, то $P(A)\le P(B)$.

Доказательство. Пусть событию А благоприятствуют m_1 исходов, а событию В – m_2 исходов. Так как все исходы, входящие в А, входят также и в В, то значит, $m_1\le m_2$. Отсюда получаем $P(A)=\frac{m_1}{n}\le\frac{m_2}{n}=P(B)$. •

5) Вероятность противоположного события.

$P(\bar{A})=1-P(A)$.

Доказательство. Пусть m исходов благоприятствуют событию А. Тогда остальные $n–m$ исходов благоприятствуют событию $\bar{A}$. Следовательно,

$$P(\bar{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A). \bullet$$

6) Формула сложения вероятностей для несовместных событий.

а) Случай двух несовместных событий.

Пусть события А и В несовместны. Тогда

$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Доказательство. Пусть событие А состоит из m_1 исходов, а событие В – из m_2 исходов. Так как события А и В не содержат общих исходов, то их сумма А+В будет состоять из (m_1+m_2) исходов. Следовательно,

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B). \bullet$$

б) Случай любого числа попарно несовместных событий.

Пусть $A_1,A_2,...,A_k$ попарно несовместные события. Тогда вероятность суммы этих событий равна сумме вероятностей:

$$P\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i).$$

Доказательство проводится аналогично п. а).

Следствие. Пусть $H_1,H_2,...,H_k$ - это полная группа событий. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k}P(H_i)=1.$$

Доказательство. События $H_1,H_2,...,H_k$ попарно несовместны, поэтому

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{k} H_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{P}(H_i).$$

Но $\sum_{i=1}^{k} H_i=\Omega$, так как это полная группа событий. Поэтому

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{k} H_i\right)=\mathrm{P}(\Omega)=1$$

и, следовательно, $\sum_{i=1}^{k}\mathrm{P}(H_i)=1$. •

7) Формула сложения вероятностей для произвольных событий.

Для любых событий A и B

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB).$$

Доказательство. Сумму событий A+B можно представить в следующем виде:

$$A+B=A+(B-A),$$

причем события A и B–A несовместны (рис. 10).

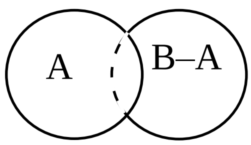


Рис. 10

Тогда по свойству 6

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B-A). \quad (1)$$

Далее, $B=AB+(B-A)$, причем события AB и B–A несовместны (рис. 11).

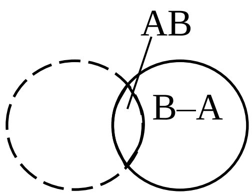


Рис. 11

Следовательно, $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(B-A)$ и $\mathrm{P}(B-A)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$. Подставляя полученное выражение в формулу (1), получаем

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB). \bullet$$

Задача 6. В условиях задачи 1 из п. 1 найти вероятность получить деталь второго или третьего сорта.

Решение. Рассмотрим событие A={деталь либо второго, либо третьего сорта}. Тогда $A=A_2+A_3$, причем события A_2 и A_3 несовместны. Используя значения вероятностей $\mathrm{P}(A_2)$ и $\mathrm{P}(A_3)$, вычисленные в задаче 1, получаем $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A_2)+\mathrm{P}(A_3)=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$.

Задача 7. Музыкальный концерт состоит из пяти номеров в исполнении баяна и двух скрипичных пьес. Какова вероятность, что в программе концерта скрипичные пьесы не окажутся рядом?

Решение.

Обозначим искомую вероятность события $\mathrm{P(A)}$. Поскольку 7 номеров программы могут быть расположены в любом порядке, общее число исходов $n = 7!$ Вычислим сначала вероятность противоположного события $\mathrm{P(\overline{A})}$, то есть вероятность того, что скрипичные пьесы окажутся рядом. Временно считая скрипичные пьесы одним номером, получим 6! различных расположений номеров программы, а так как существует 2 способа расположить две пьесы в определенном порядке, получаем $2 \cdot 6!$ благоприятствующих исходов для события $\overline{\mathrm{A}}$. Следовательно, $\mathrm{P(\overline{A})} = \frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$. Тогда $\mathrm{P(A)} = 1 - \mathrm{P(\overline{A})} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

Задача 8. В лотерее на 400 билетов разыгрывается 4 выигрыша.

1) Если приобрести 1 билет, какова будет вероятность а) выиграть? b) не выиграть?
2) Если приобрести 2 билета, какова будет вероятность
   a) выиграть по обоим билетам?
   b) не получить никакого выигрыша?
   c) выиграть хотя бы по одному билету?
   d) выиграть только по одному билету?

Решение.

1) Если приобретается 1 билет, то общее число исходов эксперимента будет равно $n = 400$, а число благоприятствующих исходов – $m = 4$. Тогда вероятность выиграть $\mathrm{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{400} = 0{,}01$, а вероятность не выиграть $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

2) Если приобретается 2 билета, то общее число исходов эксперимента будет равно $n = C_{400}^{2}$.

a) Чтобы выиграть по обоим билетам, эти 2 билета надо выбрать из 4 выигрышных. Значит, число благоприятствующих исходов будет равно $m_a = C_4^2$, а вероятность соответствующего события

$$\mathrm{P}_a = \frac{m_a}{n} = \frac{C_4^2}{C_{400}^2} = \frac{4!\cdot 2!\cdot 398!}{2!\cdot 2!\cdot 400!} = \frac{12}{399\cdot 400} = \frac{1}{13300} \approx 0,00008.$$

b) Чтобы не получить никакого выигрыша, оба билета должны быть выбраны из 396 невыигрышных билетов. Следовательно, число благоприятствующих исходов $m_b = C_{396}^2$, а вероятность не получить никакого выигрыша

$$\mathrm{P}_b = \frac{m_b}{n} = \frac{C_{396}^2}{C_{400}^2} = \frac{396!\cdot 2!\cdot 398!}{2!\cdot 394!\cdot 400!} = \frac{395\cdot 396}{399\cdot 400} = \frac{79\cdot 33}{133\cdot 20} \approx 0,980.$$

c) Событие {выиграть хотя бы по одному билету } является противоположным для события B={не получить никакого выигрыша}, следовательно,

$$\mathrm{P}_c = \mathrm{P}\{\textit{выиграть хотя бы по одному билету}\} = \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - \mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}_b \approx 0,020.$$

d) Чтобы выиграть только по одному билету, надо выбрать 1 выигрышный билет из 4 и 1 невыигрышный из 396. Число благоприятствующих исходов будет равно $m_d = C_4^1 \cdot C_{396}^1$, а вероятность выиграть только по одному билету –

$$\mathrm{P}_d = \frac{m_d}{n} = \frac{4\cdot 396}{C_{400}^2} = \frac{4\cdot 396\cdot 2!\cdot 398!}{400!} = \frac{8\cdot 396}{399\cdot 400} = \frac{66}{133\cdot 25} \approx 0,020.$$

3. Определение вероятности события для эксперимента с конечным числом неравновозможных исходов

Теперь обратимся к случаю, когда исходы эксперимента могут не быть равновозможными.

Предположим, проводится случайный эксперимент с n исходами. Рассмотрим пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, где ω_i - исходы эксперимента. Пусть для каждого ω_i задана вероятность $P(\omega_i)$, то есть для всех $i = 1,2,...,n$ заданы неотрицательные числа $P(\omega_i)$ такие, что $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$.

Определение. Вероятностью события А называется число P(А), равное сумме вероятностей исходов, составляющих событие А.

Пример. Студент сдает экзамен. Возможные исходы: 2, 3, 4, 5 (оценка). Здесь $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{2,3,4,5\}$. Допустим, для данного студента известны вероятности исходов:

$$P(\omega_1) = P\{2\} = 0,01;\ P(\omega_2) = P\{3\} = 0,19;\ P(\omega_3) = P\{4\} = 0,4;\ P(\omega_4) = P\{5\} = 0,4.$$

Рассмотрим событие А={студент получит 4 или 5} и В={студент сдаст экзамен}. Тогда $A = \{\omega_3, \omega_4\}$ и в соответствии с определением вероятности

$$P(A) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = 0,4 + 0,4 = 0,8.$$

Аналогично $B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ и
$P(B)=P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=0{,}19+0{,}4+0{,}4=0{,}99.$

Замечание. Классическое определение вероятности является частным случаем определения, введенного в этом пункте, так как для равновозможных исходов $P(\omega_i)=\frac{1}{n}$ для всех $i=1,2,..,n$. В общем случае, когда множество исходов эксперимента может быть бесконечным, случайные события и вероятность определяются аксиоматически. При этом остаются справедливыми все свойства вероятности, рассмотренные в п.2. Определение вероятности в случае конечного числа исходов является частным случаем аксиоматического определения.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.3.1

В пенале хранятся 12 шариковых ручек, половина из которых – красные, а остальные – черные. Из пенала наудачу вынимают половину всех ручек. Найдите вероятность того, что треть вынутых ручек – черные.

Задача 1.3.2

В ящике 10 белых и 5 черных шаров. Наудачу вынимают 3 из них. Какой состав шаров по цвету извлечь наиболее вероятно?

Задача 1.3.3

Бросают 2 игральные кости. Какова вероятность, что число на второй кости будет больше, чем на первой?

Задача 1.3.4

На полке 12 книг, 5 из которых в переплете. Наудачу берут 4 книги. Какова вероятность, что

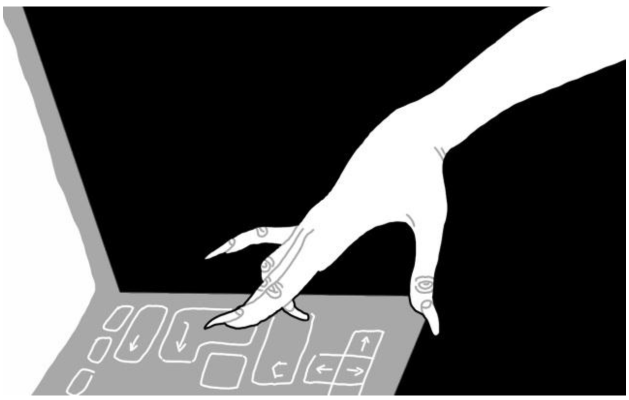
а) все четыре книги окажутся в переплете?

б) ровно две книги в переплете?

в) хотя бы одна из книг в переплете?

Задача 1.3.5

Известно, что пароль для входа в аккаунт мистера X состоит из 6 символов, первые 2 из которых – это заглавные буквы латинского алфавита, а остальные – цифры. Некто пытается угадать пароль. Какова вероятность, что он сумеет это сделать с первой попытки?



Задача 1.3.6

В автомобиле 5 мест, включая водительское. Иван, Пётр, Маша, Галя и Глеб садятся в автомобиль. Известно, что только Пётр и Глеб могут занять место водителя. Найти вероятность того, что за рулем окажется Глеб, а рядом с ним – одна из девушек.

Задача 1.3.7

Из колоды, содержащей 52 карты, последовательно извлекают 3 карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка, туз.

§4. Геометрические вероятности

Рассмотренные выше определения вероятности предполагают конечность пространства элементарных событий. Это предположение не позволяет анализировать вероятности случайных событий в экспериментах с бесконечным числом исходов. Пример такого опыта содержится в замечании к пункту 2.1 §2 главы 1.

Обобщим понятие вероятности на тот случай, когда пространство элементарных событий представляет собой некоторую ограниченную область, имеющую меру (длину, площадь, объём) [2]. Предположим, что результатом эксперимента будет случайный выбор той или иной точки этой области. По аналогии с классической схемой условимся считать, что выбор любой точки области равновозможен. Чаще всего выполнение этого условия связано с соображениями симметрии или однородности. С геометрической точки зрения равновозможность будем интерпретировать так: шансы выбрать точки из областей одинаковой меры равны.

Поскольку случайное событие – это подмножество пространства элементарных событий, естественно требовать, чтобы это подмножество также имело соответствующую меру. Приведем примеры.

Пример. а) Однородную нить длины l растягивают за концы. Рассмотрим событие $A = \{\text{нить разорвалась ближе к центру}\}$. Нити длины l сопоставим отрезок прямой такой же длины. Тогда пространство элементарных событий Ω – отрезок. Мера Ω – его длина l. Чтобы определить, произошло событие A или нет, разделим нить на четыре равные части и из них выделим две средние. Событие A происходит тогда и только тогда, когда точка разрыва лежит в выделенных частях. Мера события A – это длина двух средних частей, и она равна половине l.

б) В квадрат со стороной a наудачу бросается точка. Рассматриваем событие $A = \{\text{точка попала в круг, вписанный в этот квадрат}\}$. В данном примере пространство элементарных событий Ω – это множество точек квадрата, а его мера – площадь квадрата, то есть a^2. Мера события A – площадь вписанного круга.

Далее будем использовать стандартное обозначение меры: mes.

Итак, пусть пространство элементарных событий Ω – это ограниченная область, $mes\,\Omega$ – ее мера. Мы рассматриваем эксперимент, который заключается в случайном выборе точки из Ω. Определим вероятность случайного события A, которое может произойти в результате данного опыта, предполагая, что это событие имеет соответствующую меру: $mes\,A$.

Определение. Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение меры события A к мере пространства элементарных событий Ω:

$$P(A) = \frac{mes\,A}{mes\,\Omega}.$$

Такое определение называют *геометрическим* определением вероятности**.** Заметим, что оно так же, как и определение вероятности для эксперимента с конечным числом исходов, является частным случаем аксиоматического определения.

Вычислим геометрические вероятности событий, описанных в приведенном выше примере:

$$\text{а) } P(A) = \frac{mes\,A}{mes\,\Omega} = \frac{\text{длина } A}{\text{длина } \Omega} = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)}{l} = \frac{1}{2};$$

$$\text{б) } P(A) = \frac{mes\,A}{mes\,\Omega} = \frac{\text{площадь } A}{\text{площадь } \Omega} = \frac{\left(\frac{\pi a^2}{4}\right)}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Свойства геометрической вероятности полностью совпадают со свойствами вероятности в классическом определении.

Замечание.

Известно, что вероятность невозможного события равна нулю (это одно из свойств вероятности). Рассмотрим обратное утверждение: «если вероятность события равна нулю, то событие невозможное». Истинно оно или ложно? Если ограничиться схемой равновозможных исходов и использовать классическое определение вероятности, то утверждение будет верным, так как в этом случае непустое (возможное) событие будет иметь отличную от нуля вероятность, равную $\frac{m}{n}$, где m – число элементов этого события. Если же рассматривать геометрические вероятности, то можно убедиться, что утверждение ложно, то есть существуют возможные события, вероятности которых равны нулю. Действительно, рассмотрим эксперимент, в котором из отрезка [0; 1] случайным образом выбирают точку. Выбор любой фиксированной точки отрезка является возможным событием, но вероятность такого события равна нулю. Пояснить этот факт, опираясь только на интуицию, можно следующим образом. Длина произвольного отрезка $[a;\ b]$ равна b-a. Если же мы возьмем отрезок $[a;\ a]$ с одинаковыми концами, или, что то же самое, точку a, то длина такого отрезка или длина точки будет равна нулю. Следовательно, в соответствии с определением геометрической вероятности, вероятность попадания в фиксированную точку тоже будет нулевой. Таким образом, мы делаем вывод, что утверждение «если вероятность события равна нулю, то событие невозможное» является ложным, поскольку мы привели пример, когда оно не справедливо.

С помощью геометрической вероятности могут быть решены задачи самого разнообразного содержания, важно лишь правильно построить геометрическую модель.

Задача 1. Наудачу выбирают два числа из промежутка $[0; 1]$. Какова вероятность, что одно более чем вдвое больше другого?

Решение. Каждой паре чисел соответствует точка на плоскости с координатами (x, y). По условию $x \in [0; 1]$ и $y \in [0; 1]$. Поэтому пространством элементарных событий Ω будет квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$. Заданному событию A соответствуют два множества:

1) точки квадрата, удовлетворяющие неравенству $2x < y$, то есть точки квадрата, лежащие выше прямой $y = 2x$;

2) точки квадрата, удовлетворяющие неравенству $2y < x$, то есть точки квадрата, лежащие ниже прямой $y = \frac{x}{2}$.

Площадь каждого из соответствующих треугольников равна $\frac{1}{4}$. Следовательно, $mes\ A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, а так как $mes\ \Omega = 1$, получаем, что $P(A) = \frac{1}{2}$.

Приведем еще один пример использования геометрической вероятности – решение известной задачи о встрече.

Задача 2 (о встрече) Два человека договорились о встрече в определенном месте между 13-ю и 14-ю часами. Каждый из них приходит к месту встречи в случайный момент времени из указанного промежутка и ждет другого 15 минут. Чему равна вероятность, что встреча состоится?

Решение. Пусть x – время прихода первого человека, а y – время прихода второго. Если начало координат поместить в точку $(13; 13)$, то пространство элементарных событий Ω можно описать так:

$$\Omega = \{(x, y)|\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\} = [0; 1] \times [0; 1].$$

Тогда событие $A = \{$встреча состоялась$\}$ – это множество точек из Ω, координаты которых (x, y) удовлетворяют условию $|y - x| \le \frac{1}{4}$. С геометрической точки зрения, это те точки квадрата Ω, которые лежат между прямыми $y = x - \frac{1}{4}$ и $y = x + \frac{1}{4}$. Площадь множества A будет равна разности между площадью квадрата Ω и суммой площадей двух прямоугольных треугольников с катетами, равными $\frac{3}{4}$. Так как $mes\ \Omega = 1$, то $mes\ A = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$, следовательно, искомая вероятность $P(A) = \frac{7}{16}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.4.1. В круг радиуса R наудачу бросается точка. Найти вероятность того, что она попадет в фиксированный прямоугольный равнобедренный треугольник, вписанный в данный круг.

Задача 1.4.2. На плоскости изображены две концентрические окружности радиусов 5 и 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в больший круг, попадет в кольцо, образованное этими окружностями.

Задача 1.4.3. Наудачу выбирают 2 числа из промежутка $[0; 1]$. Какова вероятность, что их сумма лежит между числами 0,5 и 1,5?

§5. Условные вероятности. Независимые события

1. Интуитивное представление об условной вероятности

Иногда приходится рассматривать вероятности событий, исходя не из всего пространства элементарных событий Ω, а только из некоторой его части. Например, вероятность того, что случайно выбранный студент факультета имеет голубые глаза, изменится, если мы будем выбирать студента только из числа блондинов.

Еще один пример. Бросают игральную кость. Пусть А={выпадение 2}. Тогда $P(A)=\frac{1}{6}$. Теперь рассмотрим вероятность выпадения 2 при условии, что выпавшее число четное. Пусть В={выпавшее число четное}. Имеется 3 равновозможных исхода, удовлетворяющих условию В: {2}; {4}; {6}. Поэтому естественно считать, что вероятность события А равна $\frac{1}{3}$.

2. Определение условной вероятности

2.1. **Определение.** Пусть В – некоторое событие, причем $P(B)\neq 0$. *Условная вероятность события А при условии В*, обозначаемая $P(A|B)$, определяется формулой

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Используется также следующая терминология: вероятность события А при условии, что происходит событие В.

2.2. Вычисление условной вероятности в схеме равновозможных исходов.

Рассмотрим случайный эксперимент с n равновозможными исходами. Пусть m исходов благоприятствуют событию В, а k исходов благоприятствуют событию АВ.

Тогда $P(B)=\frac{m}{n}$, $P(AB)=\frac{k}{n}$ и $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{k}{n}:\frac{m}{n}=\frac{k}{m}$.

Таким образом, в случае равновозможных исходов

$$P(A|B)=\frac{k}{m}.$$

Графическая иллюстрация понятия условной вероятности приведена на рис. 12.

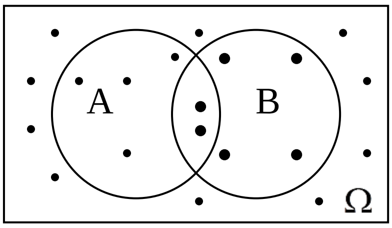


Рис. 12

Здесь m=6, k=2, $P(A|B)=\frac{k}{m}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Задача 1. Бросают игральную кость. Рассмотрим события А={выпадение 2}, В={выпадение четного числа}. Найти P(A|B).

Решение. В данном случае m=3, k=1. Тогда $P(A|B)=\frac{k}{m}=\frac{1}{3}$, что согласуется с интуитивным представлением об условной вероятности (см. п.1).

Задача 2. Из колоды, содержащей 52 карты, вынимают одну карту. Найти вероятность выпадения двойки или туза при условии, что выпадает карта старше десятки.

Решение. Рассмотрим события A={выпадение двойки или туза}, B={выпадение карты старше десятки}. Требуется найти P(A|B). Событию B благоприятствуют 4 · 4=16 исходов, то есть m=16. Событию AB благоприятствуют 4 исхода (тузы), то есть k=4. Отсюда $P(A|B)=\frac{k}{m}=\frac{1}{4}$.

Задача 3. Из чисел 1, 2, …, 12 наугад выбирают одно число. Найти вероятность получить число, большее 7, при условии, что выбранное число нечетное.

Решение. Пусть $A=$ {выбранное число больше 7}, $B=$ {выбранное число нечетное}. Событию B благоприятствуют 6 исходов (это нечетные числа от 1 до 11), а событию AB – 2 исхода (это 9 и 11). Следовательно, $P(A|B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

2.3. Свойства условной вероятности.

Условная вероятность обладает теми же свойствами, что и обычная (безусловная) вероятность (см. §3 п.2).

2.4. Формула умножения вероятностей.

Непосредственно из определения условной вероятности получаем формулу умножения вероятностей:

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B).$$

3. Независимые события

3.1. Интуитивное представление о независимых событиях.

Естественно считать независимыми такие два события, для которых вероятность появления одного из них не зависит от того, происходит ли другое событие. Иначе говоря, события A и B естественно считать независимыми, если P(A|B)=P(A).

Приведем пример, когда это условие выполняется.

Пример 1. Из колоды, содержащей 52 карты, вынимают одну карту. Рассмотрим события A={выпадение короля}, B={выпадение карты бубновой масти}. Очевидно, $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. Теперь вычислим P(A|B). Событию B благоприятствуют 13 исходов, значит, m=13. Событию AB благоприятствует 1 исход, следовательно, k=1. Тогда $P(A|B)=\frac{k}{m}=\frac{1}{13}$. Таким образом, P(A)=P(A|B), то есть вероятность выпадения короля не зависит от того, выпадет ли бубновая (или какая-либо другая) масть.

3.2. Определение независимых событий.

События A и B называются *независимыми*, если

P(AB)=P(A)·P(B) (*)

(то есть, вероятность произведения равна произведению вероятностей).

3.3. Запись условия независимости (*) через условные вероятности.

Пусть $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$. Поделим (*) на P(B). Тогда получим

$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$ или P(A|B)=P(A).

Таким образом, условие независимости событий (*) можно записать в виде P(A|B)=P(A) или, аналогично рассуждая, в виде P(B|A)=P(B), что согласуется с интуитивным представлением о независимости событий.

В примере 1 п. 3.1 мы получили, что P(A)= P(A|B), следовательно, события A={выпадение короля} и B={выпадение карты бубновой масти} являются независимыми.

Теперь приведем пример доказательства независимости событий непосредственно по определению.

Пример 2. Игральную кость бросают два раза. Рассмотрим события A={в первый раз выпадает 6}, B={во второй раз выпадает нечетное число}. Являются ли события A и B независимыми? (Интуитивно ясно, что являются, но проверим это, исходя из определения независимых событий.)

Решение. В данном эксперименте 36 равновозможных исходов:

(1,1), (1,2), …, (1,6),

(2,1), (2,2), …, (2,6),

……………………..

(6,1), (6,2), …, (6,6).

Следовательно, *n*=36. Событию A благоприятствуют 6 исходов: (6,1), (6,2), …, (6,6). Значит, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Событию B благоприятствуют $6 \cdot 3 = 18$ исходов (первый, третий и пятый столбцы в таблице исходов), следовательно, $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Наконец, событию AB благоприятствуют 3 исхода: (6,1), (6,3) и (6,5). Значит, $P(AB) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Таким образом, $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, следовательно, события A и B независимые.

Задача 4. В компьютерном классе 3 компьютера. Вероятность безотказной работы в течение месяца для каждого из них равна 0,9. Найти вероятность того, что в течение месяца хотя бы один компьютер выйдет из строя.

Решение. Пусть A={в течение месяца хотя бы один компьютер выйдет из строя}. Рассмотрим противоположное событие $\bar{A}$={ в течение месяца все компьютеры будут работать безотказно}. Так как компьютеры работают независимо друг от друга, $P(\bar{A}) = 0,9^3 = 0,729$. Тогда

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,729 = 0,271.$

Задача 5. Студенту в контрольной работе предлагается решить 5 задач. Для данного студента вероятности правильного решения задач следующие: для 1-й задачи – 0.6, для 2-й – 0.8, для 3-й – 0.9, для 4-й – 0.4 и для 5-й – 0.8. Найти вероятность того, студент не справится только с 4-й задачей.

Решение. Введем в рассмотрение следующие события:

A_i = {студент справится с *i*-й задачей}, *i*=1,…,5;

B={студент не справится только с 4-й задачей}.

Тогда $B = A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 A_5$. Предполагая, что студент решает каждую задачу независимо от других задач, получаем

$$P(B) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\bar{A}_4)P(A_5) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,9 \cdot (1-0,4) \cdot 0,8 = 0,20736.$$

Задача 6. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0.05 и 0.08. Найти вероятности отказа

а) только первого элемента;

б) только второго элемента;

в) обоих элементов;

г) хотя бы одного элемента;

д) только одного элемента.

Найти вероятность того, что хотя бы один элемент будет работать.

Решение. Рассмотрим события A_i = {откажет *i*-й элемент}, *i*=1,2;

B = {хотя бы один элемент будет работать}. Тогда вероятность отказа

а) только первого элемента будет равна

$P(A_1\bar{A}_2) = P(A_1)(1-P(A_2)) = 0,05 \cdot (1-0,08) = 0,046$;

б) только второго – $P(\bar{A}_1 A_2) = (1-P(A_1))P(A_2)) = (1-0,05) \cdot 0,08 = 0,076$;

в) обоих элементов – $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,05 \cdot 0,08 = 0,004$;

г) хотя бы одного элемента –

$P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(A_1 A_2) = 0,046 + 0,076 + 0,004 = 0,126$;

д) только одного элемента – $P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = 0,046 + 0,076 = 0,122$.

Вероятность того, что хотя бы один элемент будет работать, можно найти через вероятность противоположного события:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(A_1 A_2) = 1 - 0,004 = 0,996.$$

Задача 7. Результаты контрольных работ по математике и английскому языку показали, что 10% учеников не справляются с программой по математике, 12% – по английскому языку, а 2% – по обоим предметам. Являются ли события *A*={ученик не справляется с программой по математике} и *B*={ученик не справляется с программой по английскому языку} независимыми?

Решение. Из условия задачи заключаем, что *P(A)*=0.1, *P(B)*=0.12, а *P(AB)*=0.02. Поскольку $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$, делаем вывод, что события *A* и *B* не являются независимыми (то есть, являются зависимыми).

3.4. *Замечания.*

1) Определение независимых событий применимо и к событиям, имеющим нулевую вероятность (так как формула (*) и в этом случае имеет смысл).

2) На практике для установления независимости событий пользуются также интуитивными соображениями, основанными на опыте. Например, ясно, что при подбрасывании двух монет выпадение герба на одной монете не изменит вероятности появления герба (решетки) на другой монете. Или рождение мальчика у одной матери не изменит вероятности появления мальчика (девочки) у другой матери. Эти события независимые.

3) **Предостережение:** не следует путать независимые события с несовместными.

Для независимых событий	Для несовместных событий
$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$	$P(AB)=0$, так как $AB=\varnothing$.

<u>3.5. События, независимые в совокупности.</u>

Определение. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого выбранного из них набора событий $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ вероятность произведения этих событий равна произведению вероятностей, то есть $P\left(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right)=P\left(A_{i_1}\right)\cdot P\left(A_{i_2}\right)\cdot\ldots\cdot P\left(A_{i_k}\right)$.

Пример 1. События A, B, C будут независимыми в совокупности, если они попарно независимы (то есть любые два из этих событий являются независимыми) и

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

Пример 2. При n бросаниях игральной кости события, формулируемые относительно отдельных бросаний, будут независимыми в совокупности (аналогично случаю двух бросаний, рассмотренному выше). Это соответствует интуитивному представлению о независимости. Допустим, n=5. События A={в первый раз выпадает четное число}, B={в третий раз выпадает число, не превосходящее четырех} и C={в пятый раз выпадает число 2} являются независимыми в совокупности.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.5.1. Из чисел 6, 11, 12, 14, 20, 29, 31 наугад выбирают одно. Найти вероятность получить число больше 11 при условии, что выбранное число четное.

Задача 1.5.2. Из колоды в 52 карты наугад извлекаются три карты. Найти вероятность того, что в выбранном наборе оказались две дамы и валет при условии, что все три карты красной масти.

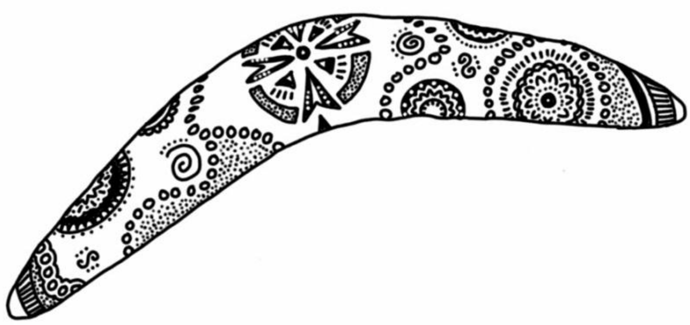
Задача 1.5.3. 5-значное число образовано с помощью случайной перестановки цифр 1,2,3,4,5. Найти вероятность того, что цифры 1 и 3 стоят рядом при условии, что число четное.

Задача 1.5.4. Игральную кость бросают 2 раза. Найти вероятность того, что в первый раз выпадет 1, при условии, что сумма выпавших чисел меньше 4.

Задача 1.5.5. Игрок X выбирает число 0 или 1 с вероятностями 0, 3 и 0,7 соответственно. Игрок Y независимо от X тоже выбирает 0 или 1, но с вероятностями 0,4 и 0,6. Если сумма выбранных чисел четная, то выигрывает X, если нечетная – то выигрывает Y. Найти вероятности выиграть для X и для Y.

Задача 1.5.6. Игральную кость бросают 3 раза. Найти вероятность события A={в первый раз выпало число 6, во второй раз - число, меньшее 4, а в третий раз – число, не делящееся на 3}.

Задача 1.5.7. Два аборигена пытаются избавиться от старых бумерангов. Каждый из них бросает свой бумеранг независимо от другого. Вероятность возвращения бумеранга для первого аборигена равна 0.8; для второго – 0.7. Найти вероятность того, что а) им обоим удастся избавиться от бумерангов; б) желанной цели достигнет только первый абориген.



Задача 1.5.8. Станция метрополитена оборудована тремя эскалаторами. Вероятность безотказной работы в течение года для 1-го эскалатора равна 0.9, для 2-го – 0.8 и для 3-го – 0.7. Найти вероятность безотказной работы хотя бы одного эскалатора в течение года.

Задача 1.5.9. Авария происходит в том случае, когда выходит из строя хотя бы один из 4-х приборов. 1-й прибор выходит из строя с вероятностью 0.03, 2-й прибор – с вероятностью 0.02, 3-й прибор – с вероятностью 0.01 и 4-й – с вероятностью 0.02. Найти вероятность того, что авария не произойдет.

Задача 1.5.10 Три студента пришли сдавать экзамен. 1-й студент может сдать экзамен с вероятностью 0.7; 2-й – с вероятностью 0.9 и 3-й – с вероятностью 0.5. Найти вероятности следующих событий:

а) все студенты сдадут экзамен;
б) никто из студентов не сдаст экзамен;
в) сдаст экзамен только второй студент;
г) не сдаст экзамен только третий студент.

§6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Предположим, вероятность события A неизвестна, но известны или легко вычисляются условные вероятности $P(A|H_i)$ для всех H_i из некоторой полной группы событий $H_1, H_2, ..., H_n$. Если, кроме того, известны также вероятности $P(H_i)$, то формула полной вероятности дает возможность вычислить и $P(A)$.

Теорема 1 (формула полной вероятности). Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ – это полная группа событий, причем $P(H_i) \neq 0$ для всех $i = 1,2,...,n$.

Тогда для любого события А справедлива формула

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|H_i)\cdot P(H_i).$$

Доказательство. Представим событие А в виде суммы:
$A=AH_1+AH_2+...+AH_n$ (см. рис. 13).

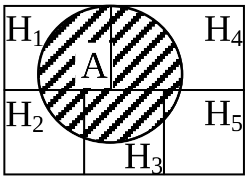


Рис.13

Так как события H_i попарно несовместны, то и события AH_i также попарно несовместны. Тогда по формуле сложения вероятностей

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AH_i).$$

Применяя формулу умножения вероятностей, получаем

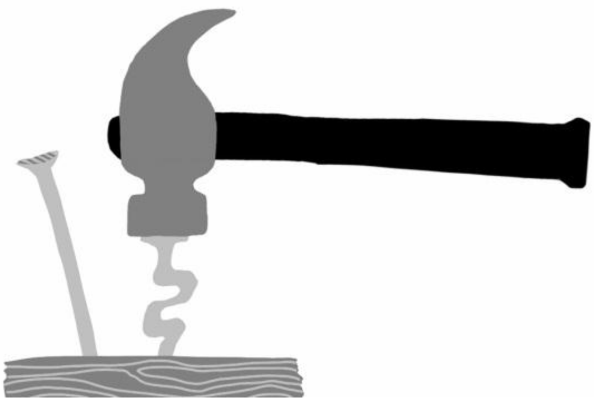
$P(AH_i)=P(A|H_i)P(H_i)$, следовательно, $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|H_i)P(H_i)$.

Задача 1. Партия деталей содержит 20% гвоздей, изготовленных первым заводом, 30% - вторым заводом и 50% - третьим заводом. Для первого завода вероятность выпуска бракованного гвоздя равна 0,05, для второго – 0,01 и для третьего – 0,06. Из партии берется наудачу один гвоздь. Найти вероятность того, что этот гвоздь бракованный.

Решение. Рассмотрим события А={выбранный гвоздь бракованный}, H_i ={выбранный гвоздь изготовлен i-м заводом}, i = 1,2,3. Так как в партии доля гвоздей, изготовленных первым заводом, составляет 0,2 (20%), $P(H_1)=0{,}2$. Аналогично $P(H_2)=0{,}3$ и $P(H_3)=0{,}5$.

Далее, вероятность получить бракованный гвоздь при условии, что он изготовлен первым заводом, совпадает с вероятностью брака для первого завода, то есть, $P(A|H_1)=0{,}05$. Аналогично $P(A|H_2)=0{,}01$ и $P(A|H_3)=0{,}06$. Теперь, применяя формулу полной вероятности, получаем

$$P(A)=P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)+P(A|H_3)P(H_3)=$$
$$=0{,}05\cdot 0{,}2+0{,}01\cdot 0{,}3+0{,}06\cdot 0{,}5=0{,}043.$$



Задача 2. Учитель может вызвать к доске решать задачу ученика Иванова с вероятностью 0.4 и ученика Петрова с вероятностью 0.6. Иванов может решить задачу с вероятностью 0.1, а Петров – с вероятностью 0.9. За нерешенную задачу ставится двойка. Найти вероятность того, что учителю придется поставить двойку.

Решение. Рассмотрим события $A = \{$ученик решил задачу$\}$, $B = \{$учителю придется поставить двойку$\}$, $H_1 = \{$был вызван Иванов$\}$, $H_2 = \{$был вызван Петров$\}$. По условию $P(H_1) = 0.4$, $P(H_2) = 0.6$, $P(A|H_1) = 0.1$, $P(A|H_2) = 0.9$. Применяя формулу полной вероятности, имеем

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 0.1 \cdot 0.4 + 0.9 \cdot 0.6 = 0.58.$$

Так как $B = \bar{A}$, получаем $P(B) = 1 - P(A) = 0.42$.

Задача 3. В библиотеке два читальных зала. В первом занимаются 4 студента философского факультета и 6 студентов исторического, а во втором соответственно 4 и 3. Из первого зала во второй перешел один человек, после чего из второго зала один человек ушел. Найти вероятность того, что ушедший – это студент философского факультета.

Решение. Пусть $H_1 = \{$из первого зала во второй перешел студент философского факультета$\}$, $H_2 = \{$из первого зала во второй перешел студент исторического факультета$\}$, $A = \{$ушедший из второго зала – студент философского факультета$\}$. Предполагая, что переход из первого зала во второй равновозможен для всех студентов, можно вычислить вероятности событий H_1 и H_2: $P(H_1) = 0.4$, $P(H_2) = 0.6$. Далее, после перехода во втором зале окажется 8 человек, причем при осуществлении события H_1 там будет 5 студентов философского факультета и 3 студента исторического, а при осуществлении события H_2 – 4 студента философского факультета и 4 студента исторического. Аналогично вычислению вероятностей H_1 и H_2 находим условные вероятности $P(A|H_1) = \frac{5}{8} = 0.625$ и $P(A|H_2) = \frac{4}{8} = 0.5$. Затем по формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 0{,}625 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}55.$$

Пусть теперь, как и раньше, известны условные вероятности $P(A|H_i)$ и $P(H_i)$ для всех H_i из полной группы событий $H_1, H_2, ..., H_n$. Предположим, в результате эксперимента происходит событие А. Какова теперь вероятность того или иного события H_k из полной группы, то есть, чему равна условная вероятность $P(H_k | A)$? Ответ на этот вопрос дает формула Байеса.

Теорема 2 (формула Байеса). Пусть дана полная группа событий $H_1, H_2, ..., H_n$ и некоторое событие А. Тогда для любого k=1,2,…,n

$$P(H_k \mid A)=\frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}.$$

Доказательство. По определению условной вероятности

$P(H_k \mid A)=\dfrac{P(AH_k)}{P(A)}$. По формуле умножения вероятностей

$P(AH_k)=P(A|H_k)P(H_k)$.

Следовательно, $P(H_k \mid A)=\dfrac{P(A|H_k)P(H_k)}{P(A)}$. Теперь используем формулу полной вероятности $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$ и подставим выражение для $P(A)$ в предыдущую формулу. В итоге получаем

$$P(H_k \mid A)=\frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}. \bullet$$

Замечания.

1) В условии теоремы Байеса предполагается, что $P(H_i)\neq 0$ для всех i =1, 2, …, n, а также $P(A)\neq 0$.
2) Формулу Байеса можно также записать в виде
$$P(H_k \mid A)=\frac{P(A|H_k)P(H_k)}{P(A)}.$$
Это следует из доказательства теоремы 2.
3) Применительно к формуле Байеса используется следующая терминология. События $H_1, H_2, ..., H_n$ называют гипотезами; вероятности $P(H_i)$, i =1,2, …, n, называют априорными вероятностями гипотез, так как они известны до испытания; условные вероятности $P(H_i \mid A)$ называют апостериорными вероятностями гипотез, так как они вычисляются в предположении, что событие А наступило.

Задача 4. Используем условие задачи 1 с гвоздями (см. выше) и поставим вопрос следующим образом: если выбранный гвоздь оказался бракованным, то какова вероятность, что он изготовлен i-м заводом (i=1, 2, 3)?

Решение. Применим обозначения A, H_1, H_2, H_3, введенные при решении задачи 1. Требуется найти $P(H_1 \mid A)$, $P(H_2 \mid A)$, $P(H_3 \mid A)$. По формуле Байеса

$$P(H_1 \mid A)=\frac{P(A|H_1)P(H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|H_i)P(H_i)}=\frac{0{,}05\cdot 0{,}2}{0{,}05\cdot 0{,}2+0{,}01\cdot 0{,}3+0{,}06\cdot 0{,}5}=\frac{10}{43}.$$

Аналогично $P(H_2|A)=\dfrac{P(A|H_2)P(H_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(A|H_i)P(H_i)}=\dfrac{0{,}01\cdot 0{,}3}{0{,}043}=\dfrac{3}{43}$,

$P(H_3|A)=\dfrac{0{,}06\cdot 0{,}5}{0{,}043}=\dfrac{30}{43}$.

Задача 5. Статистика показывает, что 5% мужчин и 0,4% женщин являются дальтониками. Из группы людей, в составе которой 60 женщин и 40 мужчин, случайным образом выбирают одного человека. Этот человек оказался дальтоником. Чему равна вероятность, что это мужчина?

Решение. Рассмотрим события $A=\{$выбранный человек – дальтоник$\}$, $H_1=\{$был выбран мужчина$\}$, $H_2=\{$была выбрана женщина$\}$. В соответствии с условием задачи $P(A|H_1)=0.05$, $P(A|H_2)=0.004$, $P(H_1)=0.4$, $P(H_2)=0.6$. По формуле Байеса

$$P(H_1|A)=\frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)}=\frac{0{,}05\cdot 0{,}4}{0{,}05\cdot 0{,}4+0{,}004\cdot 0{,}6}=\frac{25}{28}.$$

Задача 6. В задачнике по теории вероятностей имеется 10 задач на формулу полной вероятности и 15 задач – на формулу Байеса. Студент может решить с вероятностью 0.8 любую задачу по первой теме и с вероятностью 0.7 – по второй теме. Из этих 25 задач преподаватель выбирает наугад одну и предлагает ее студенту.

а) Найти вероятность того, что студент решит задачу.

б) Если известно, что студент решил задачу, какова вероятность, что это была задача на формулу Байеса?

Решение. Введем обозначения: $A=\{$студент решил задачу$\}$, $H_1=\{$была выбрана задача на формулу полной вероятности$\}$, $H_2=\{$ была выбрана задача на формулу Байеса$\}$. Тогда

$$P(H_1)=\frac{10}{25}=0{,}4,\ P(H_2)=\frac{15}{25}=0{,}6,\ P(A|H_1)=0.8,\ P(A|H_2)=0.7.$$

а) По формуле полной вероятности

$$P(A)=P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)=0{,}8\cdot 0{,}4+0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}32+42=0{,}74.$$

б) Требуется найти $P(H_2|A)$. По формуле Байеса (см. замечание 2) получаем

$$P(H_2|A)=\frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}7\cdot 0{,}6}{0{,}74}=\frac{0{,}42}{0{,}74}\approx 0{,}57.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.6.1. Первый стрелок поражает мишень с вероятностью 0.9, второй стрелок – с вероятностью 0.8, и третий стрелок – с вероятностью 0.7. Из этих стрелков с вероятностями 0.2, 0.3 и 0.5 соответственно выбирается один, и он производит выстрел по мишени. Найти вероятность попадания.

Задача 1.6.2. Тренер сообщил, что в соревнованиях будет участвовать только один из петербургских спортсменов, причем с вероятностью 0.6 этим участником будет спортсмен А, с вероятностью 0.3 – В и с вероятностью 0.1 – С. Вероятность победить в соревнованиях для спортсмена А составляет 0.9, для спортсмена В – 0.8 и для спортсмена С – 0.6. Найти вероятность того, что победу одержит петербуржец.

Задача 1.6.3. 40% приборов собирается из высококачественных деталей, остальные – из деталей обычного качества. В первом случае надежность прибора (вероятность безотказной работы в течение времени Т) равна 0.9; если же прибор собран из обычных деталей, его надежность равна 0.6. Если прибор работал безотказно, чему равна вероятность того, что он собран из высококачественных деталей?

Задача 1.6.4. Студент может добраться до университета на одном из трех видов транспорта: на автобусе, троллейбусе или метро. Предполагается, что все варианты выбора транспорта равновозможны. Вероятность того, что студент успевает на занятия, добираясь на автобусе, равна 0,8; на троллейбусе – 0,6; на метро – 0,9.

а) Какова вероятность опоздания?

б) Если известно, что студент опоздал на занятия, какова вероятность, что он добирался на троллейбусе?

Задача 1.6.5. Сын бросает игральную кость, после чего играет с отцом в шахматы. Если выпадет 1 очко, то отец играет с полным набором фигур и пешек, если 2 очка – без пешки, 3 очка – без коня, 4 очка – без слона, 5 очков – без ладьи, 6 очков – без ферзя. Вероятности выигрыша отца в каждой ситуации равны соответственно 0.9; 0.8; 0.6; 0.6; 0.5 и 0.2.

а) Какова вероятность того, что отец выиграет партию?

б) Если известно, что сын выиграл партию, какова вероятность, что отец играл с полным набором фигур и пешек?

Задача 1.6.6. Из 30 вопросов студент знает 25. В билете 2 вопроса. Для получения зачета надо либо ответить на оба вопроса, либо ответить на один вопрос билета и на один дополнительный из числа тех 28 вопросов, которые не попали билет. Какова вероятность получить зачет?

ГЛАВА 2. ИСПЫТАНИЯ БЕРНУЛЛИ

§1. Схема Бернулли

1. Определение схемы Бернулли

Проводятся n независимых одинаковых экспериментов (испытаний), в каждом из которых может наступить или не наступить некоторое событие А. Термин «независимые испытания» означает, что любые события, происходящие в разных испытаниях, являются независимыми в совокупности.

Введем обозначения:

$p=P(A)$, $q=P(\bar{A})$. Очевидно, q=1-p. Событие А условно называют успехом (У), а событие $\bar{A}$ - неудачей (Н).

Определение. *Испытания Бернулли (схема Бернулли)* – это последовательность испытаний, для которой выполнены следующие условия:

1) в каждом испытании может наступить либо успех, либо неудача (то есть одно из двух несовместных событий);

2) испытания независимые;

3) вероятность успеха Р(У)=р – одна и та же для всех испытаний.

Пример 1. Монету подбрасывают 3 раза. Пусть событие А={выпадение герба} – это успех, а соответственно $\bar{A}$={выпадение решетки} – это неудача. Тогда $P(У)=p=\frac{1}{2}$. Все три условия из определения схемы Бернулли выполнены. Следовательно, мы имеем 3 испытания Бернулли с вероятностью успеха $p=\frac{1}{2}$.

2. Исходы эксперимента в схеме Бернулли

Пусть проводится 3 испытания Бернулли. Исходы этого эксперимента: {УУУ}, {УУН}, {УНУ}, {УНН}, {НУУ}, {НУН}, {ННУ}, {ННН}. Здесь всего 2^3=8 исходов. Вычислим вероятности этих исходов. Учитывая независимость испытаний, получаем:

Р{УУУ}=Р(У) · Р(У) · Р(У)=p^3,

Р{УУН}=Р(У) · Р(Y) · Р(Н)=p^2q и т.д.

Рассмотрим теперь n испытаний Бернулли. Исходами этого эксперимента будут различные цепочки длины n, составленные из успехов и неудач. Найдем, например, вероятность цепочки {УНУУН…Н}, в которой ровно три успеха:

Р{УНУУН…Н}=p · q · p · p · q · … · q= p^3q^{n-3}.

Аналогично вычисляются вероятности остальных цепочек.

Пример 2. Стрелок стреляет из ружья 10 раз. Вероятность попадания (при одном выстреле) – 0,8. Предполагается независимость выстрелов. Пусть событие А={попадание} – это успех, соответственно $\bar{A}$={промах} – это неудача.

Тогда Р(У)=0,8. В соответствии с определением мы имеем 10 испытаний Бернулли с вероятностью успеха р=0,8. Найдем, например, вероятность того, что стрелок попал только на десятый раз:

$$P\{НН\ldots НУ\} = q^9 p = 0{,}2^9 \cdot 0{,}8.$$

3. Примеры испытаний Бернулли

Во всех приведенных примерах предполагается независимость испытаний.

1) Монету подбрасывают n раз, причем вероятность выпадения герба равна р (то есть монета может быть несимметричной).

2) n студентов сдают экзамен, причем для каждого из этих студентов вероятность сдать экзамен равна р (одинаковая).

3) n стрелков стреляют по мишени, и для каждого стрелка вероятность попадания равна р.

4) Шахматист играет n партий, причем в каждой партии он выигрывает с вероятностью р.

5) Магазин посещают n покупателей, и для каждого покупателя вероятность совершить покупку на сумму, превышающую 1000 руб., равна р.

6) n человек застраховали имущество от пожара, и для каждого страхователя вероятность возникновения пожара в течение года равна р.

§2. Формула Бернулли

Теорема. Рассмотрим n испытаний Бернулли с вероятностью успеха Р(У)=р. Обозначим через $P_n(m)$ вероятность появления m успехов в n испытаниях. Тогда

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q=1-p,\ m=0, 1, 2,\ldots,n.$$

(Эта формула и называется формулой Бернулли.)

Доказательство. Рассмотрим событие D={в n испытаниях Бернулли ровно m успехов}. Тогда $P_n(m) = P(D)$. Событие D представляет собой сумму всевозможных цепочек длины n вида {УНУУ…Н}, в которых ровно m успехов. Эти цепочки – попарно несовместные события. Поэтому P(D) будет равно сумме вероятностей всех таких цепочек. Вероятность каждой цепочки равна $p^m q^{n-m}$, а количество таких цепочек равно числу способов из n мест выбрать m (на которых будут стоять «У»), то есть C_n^m. Отсюда

$$P_n(m) = P(D) = C_n^m p^m q^{n-m}. \bullet$$

Замечания.

1) В формуле Бернулли при m=0 и m=n получим $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$ и $C_n^n = \dfrac{n!}{n!0!} = 1$, так как 0!=1 (по определению).

2) При m=0 и m=n можно получить соответствующие вероятности и без формулы Бернулли:

$$P_n(0)=P\{HH\ldots H\}=q^n;\quad P_n(n)=\{УУ\ldots У\}=p^n.$$

Задача 1. Монету подбрасывают 3 раза. Найти вероятность того, что герб выпадет 2 раза.

Решение. Пусть событие {выпадение герба при одном подбрасывании} – это успех. Мы имеем 3 испытания Бернулли с вероятностью успеха $p=\frac{1}{2}$. Требуется найти $P_3(2)$. По формуле Бернулли

$$P_3(2)=C_3^2p^2q^{3-2}=3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

Задача 2. Игральную кость бросают 8 раз. Найти вероятности событий A={ровно 5 раз выпадет число, делящееся на 3} и B={не менее двух раз выпадет число 2}.

Решение. Пусть успех – это выпадение числа, делящегося на 3. Вероятность успеха $p=P(У)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; вероятность неудачи $q=1-p=\frac{2}{3}$. Мы имеем 8 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p=\frac{1}{3}$. Найдем P(A).

По формуле Бернулли

$$P(A)=P_8(5)=C_8^5p^5q^{8-5}=\frac{8!}{5!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{56\cdot 8}{3^8}\approx 0{,}068.$$

Далее, пусть теперь успех – это выпадение числа 2. Тогда вероятность успеха $p=\frac{1}{6}$, вероятность неудачи $q=1-p=\frac{5}{6}$. Вероятность события, противоположного событию B, будет равна $P(\overline{B})=P_8(0)+P_8(1)$. Следовательно,

$$P(B)=1-(P_8(0)+P_8(1))=1-q^8-C_8^1pq^7=1-\left(\frac{5}{6}\right)^8-8\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^7\approx 0{,}3953.$$

Задача 3. Студент решает каждую задачу с вероятностью 0,6 (независимо от других задач). Ему предлагают решить 4 задачи. Найти вероятность того, что он решит

1) только одну задачу;
2) хотя бы одну задачу;
3) по крайней мере 3 задачи.

Решение. Мы имеем 4 независимые испытания. Будем считать успехом событие {задача решена}. Тогда вероятность успеха $p=0.6$, вероятность неудачи $q=0.4$. Используем схему Бернулли. Обозначим искомые вероятности событий через $P(A_1),\ P(A_2),\ P(A_3)$ соответственно. Тогда

$$P(A_1)=C_4^1pq^{4-1}=4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4^3=0{,}1536;$$

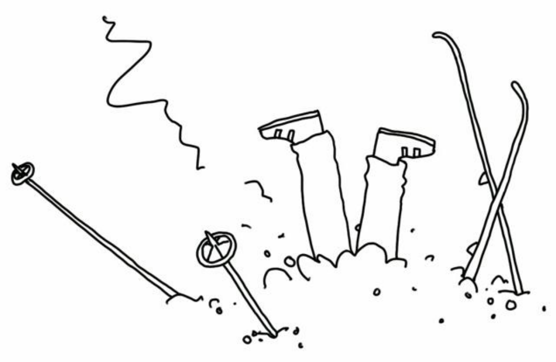
$$P(A_2)=1-P(\overline{A_2})=1-P_4(0)=1-q^4=1-(0{,}4)^4=1-0{,}0256=0{,}9744;$$

$$P(A_3)=P_4(3)+P_4(4)=C_4^3 p^3 q^{4-3}+p^4=4\cdot(0,6)^3\cdot 0,4+(0,6)^4\approx 0,4752.$$

Задача 4. Начинающий горнолыжник успешно преодолевает спуск с горы с вероятностью 0,4. Какова вероятность, что из шести спусков неудачными для него будут не более двух?

Решение. По условию задачи вероятность неудачного спуска (при одной попытке) – это $q=1-0,4=0,6$. Искомую вероятность обозначим $P(A)$. Событие A означает, что либо все 6 попыток будут успешными, либо неудачной станет только одна попытка, либо только две. Применяя формулу сложения вероятностей для несовместных событий и формулу Бернулли, получаем:

$$P(A)=(0,4)^6+C_6^5\cdot(0,4)^5\cdot 0,6+C_6^4\cdot(0,4)^4\cdot(0,6)^2=0,1792.$$



Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.2.1. Шахматист играет 5 партий, причем для него вероятность выиграть в каждой отдельной партии равна 0.7. Вычислить вероятность того, что он одержит победу ровно в трех партиях.

Задача 2.2.2. Студент X ходит на занятия по математике с вероятностью 0,6. Вычислить вероятность того, что он придет на четыре занятия из шести.

Задача 2.2.3. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника

а) три партии из четырех или пять из восьми?

б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми? (Ничейный исход партии исключен.)

Задача 2.2.4. Лифт останавливается на пяти этажах. В лифт садятся 6 пассажиров, каждый из которых может выйти на любом из пяти этажей с равной вероятностью. Найти вероятность того, что трое из них выйдут на последнем этаже. (Использовать формулу Бернулли.)

Задача 2.2.5. Два баскетболиста делают по два броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 для первого баскетболиста и 0,7 для второго. Найти вероятность того, что

а) первый попадет хотя бы один раз, а второй – два раза;

б) у баскетболистов будет равное количество попаданий;

в) у баскетболистов будет неравное количество попаданий.

Задача 2.2.6. Номер автомобиля состоит из четырех произвольных цифр. Найти вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины

а) не содержит цифры 5;

б) содержит не более одной пятерки;

в) совпадает с номером «2222».

§3. Закон больших чисел в форме Бернулли. Статистическое определение вероятности

1. Случайные эксперименты с неравновозможными исходами

Рассмотрим случайные эксперименты с двумя исходами, которые не являются равновозможными. Приведем примеры.

а) Стрелок производит выстрел по мишени. Исходы эксперимента: А={попадание}, В={промах}. Как правило, эти исходы не равновозможны.

б) Ведутся ежедневные наблюдения за пожарами в лесном массиве. В данном случае под экспериментом понимается наблюдение в течение одних суток и фиксация пожара, если он произошел. Тогда исходами эксперимента будут {возникновение пожара}, {отсутствие пожара}.

в) Подбрасывается несимметричная монета. Исходы {выпадение герба} и {выпадение решетки} не будут равновозможными.

Как найти вероятности исходов в этих случаях? При рассмотрении отдельных испытаний, конечно же, вероятности исходов определить нельзя. Например, по одному или двум выстрелам невозможно определить вероятность попадания для данного стрелка. Однако, имея результаты большого количества независимых одинаковых испытаний, уже можно оценить вероятность соответствующего события. Так, при большом количестве наблюдений за лесными пожарами можно оценить вероятность возникновения пожара в данной местности.

2. Понятие о законе больших чисел в форме Бернулли

Рассмотрим случайный эксперимент, в котором может произойти или не произойти некоторое событие A. Вероятность $P(A)$ – это объективно существующая величина. Предположим, данный эксперимент повторяется n раз, причем испытания проводятся в одинаковых условиях и независимо друг от друга. Пусть μ – это число испытаний, в которых произошло событие A.

Определение. *Частотой* случайного события A называется число $\frac{\mu}{n}$, то есть отношение числа испытаний, в которых наступило событие A, к общему числу испытаний.

Пример. Стрелком произведено 100 выстрелов, в результате которых зафиксировано 69 попаданий. В данном случае частота попадания равна 0,69.

Оказывается, если число испытаний n неограниченно возрастает, то частота $\frac{\mu}{n}$ события A приближается к вероятности $P(A)$, и при больших n будем иметь приближенное равенство

$$\frac{\mu}{n} \approx P(A).$$

Точная математическая формулировка соответствующей теоремы называется «закон больших чисел в форме Бернулли».

В качестве иллюстрации закона больших чисел приведем результаты экспериментов с подбрасыванием монеты, проведенных французским естествоиспытателем XVIII века Бюффоном и английским статистиком К. Пирсоном (XIX-XX вв.):

	Число подбрасываний n	Число выпадений герба μ	Частота выпадения герба $\frac{\mu}{n}$
1. Бюффон	4040	2048	0,507
2. Пирсон	12000	6019	0,5016
3. Пирсон	24000	12012	0,5005

Как видно из таблицы, полученные значения частоты выпадения герба достаточно близки к числу 0.5, то есть к вероятности выпадения герба.

3. Статистическое определение вероятности

Пусть проводится n независимых одинаковых экспериментов, в каждом из которых мы наблюдаем за тем, происходит или нет некоторое событие A. Если n достаточно большое, то по закону больших чисел $\frac{\mu}{n} \approx P(A)$, где $\frac{\mu}{n}$ – частота события A в n испытаниях. Тогда, если вероятность события A неизвестна, можно принять ее равной (приближенно) числу $\frac{\mu}{n}$. Такой подход к численному определению вероятности называется статистическим. Итак, формула $P(A) = \frac{\mu}{n}$, где $\frac{\mu}{n}$ – частота события A в n испытаниях, дает нам *статистическое* определение вероятности события. Как уже упоминалось, это определение имеет смысл только при достаточно большом количестве испытаний. Надо заметить, что такое определение согласуется с интуитивным представлением о вероятности.

Пример 1[8]. Еще в XVIII веке было замечено, что среди отправленных по почте писем доля писем без указания адреса обладает статистической устойчивостью, то есть, при рассмотрении большого количества писем частота появления среди них письма без адреса лишь незначительно отклоняется от некоторой средней величины. По данным русской почтовой статистики за 1906–1910 гг. на каждый миллион отправленных писем приходилось в среднем 26 писем без указания адреса. Следуя статистическому определению вероятности, можно считать, что вероятность отправления письма без адреса равна $26 \cdot 10^{-6}$.

Пример 2[8]. По данным о рождаемости в Швеции за 1935 год частота рождения мальчика составила 0,517. В соответствии со статистическим определением вероятности, можно принять вероятность рождения мальчика равной 0,517.

Пример 3. Монету подбросили 2000 раз. При этом герб выпал 423 раза. Симметричная ли была монета? Как приближенно оценить вероятность выпадения герба?

В данном эксперименте частота выпадения герба $\frac{\mu}{n} = \frac{423}{2000} = 0.2115$, что значительно отличается от числа 0.5, то есть от вероятности выпадения герба в случае симметричной монеты. Следовательно, в соответствии с законом больших чисел можно сделать вывод, что монета была несимметричной, а вероятность выпадения герба для этой монеты приближенно равна 0,21.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ФИЛОСОФСКИЕ АСПЕКТЫ ВЕРОЯТНОСТИ

§1. Объективность и субъективность вероятности

Главной проблемой, связанной с вероятностью, является проблема природы вероятностного знания: обусловлено ли это знание спецификой исследуемой реальности или же спецификой нашего ума, отражает оно сущность познаваемого объекта или возможности познающего субъекта? В острой и продолжительной борьбе мнений относительно понимания вероятности выкристаллизовались две противоположные точки зрения. Сторонники объективности вероятности признают существование случайностей в самой природе вещей и наличие разных объективных возможностей в развитии явлений и процессов. Сторонники субъективности вероятности объясняют возникновение вероятностных представлений недостатком сведений об объекте, ограниченными познавательными возможностями субъекта. В «Письмах о вероятности» Паскаль защищает точку зрения объективности вероятности: «…я считаю, что вероятность случайного события не зависит от нашего суждения о ней, она представляет собой некое число, значение которого разными лицами оценивается по-разному» [12]. Я. И. Хургин в своей работе «Как объять необъятное» так поясняет объективный характер вероятности: «Вероятность наступления события существует реально и не зависит от проводимых экспериментов – это нечто вроде массы в физике».

Следует заметить, что вероятностные суждения нельзя связывать с общепринятыми мнениями. Лейбниц[9] в своем труде «Новые опыты о человеческом разуме» по этому поводу писал: «Мнение авторитетных лиц является только одним из признаков, способных сделать какое-нибудь мнение вероятным, но им не исчерпывается правдоподобие. И когда Коперник был почти одинок со своим мнением, то оно все же было несравненно вероятнее, чем мнение всего остального человечества».

Чтобы подчеркнуть элемент субъективности при оценке человеком вероятности некоторого события, Э. Борель обозначает вероятность через $P(A,K)$, что означает вероятность события A при наличии совокупности сведений K, заключенных в некотором человеческом мозгу [1]. В повседневной речи люди могут высказывать свои суждения по поводу предстоящего события, характеризуя его как вероятное, весьма вероятное или даже достоверное в зависимости от того, какими сведениями относительно этого события они располагают. Например, вероятность события A={сегодня вечером будет дождь} разными лицами может быть оценена по-разному: для того, кто ориентируется на метеосводку – это $P(A,K)$, для другого, который основывается на народных приметах – это $P(A,K')$.

[9] Лейбниц Готфрид (1646-1716) – немецкий философ, математик, физик, языковед.

Таким образом, необходимо четко различать вероятность события как его объективную характеристику и оценку этой вероятности как субъективное отношение.

§2. Случайность и необходимость в случайных явлениях. Вероятность и причинность

Характерной особенностью отношений, описываемых с помощью теории вероятностей, является их случайность. Вопрос о том, что такое случай, затрагивает глубокие мировоззренческие основы вероятностных представлений. Историческое развитие взглядов на случайное прошло диалектический путь от раздвоения противоположностей к их единству. Два противоположных подхода к решению проблемы случайности наметились уже в античной философии. Так, согласно Демокриту (V-IV вв. до н.э.), в природе господствует лишь чистая необходимость; случайное он отождествлял с непознанным. Левкипп и Цицерон также полагали, что все в мире происходит благодаря необходимости и причинным связям. Понятие причинности у Демокрита и других греческих философов носило упрощенный характер. Они считали случайность субъективным понятием, прикрывающим человеческое незнание, и в результате этого необходимость приобретала у них характер предопределенности.

Крупным естественнонаучным достижением древнегреческого материализма был атомизм, который получил наивысшее развитие во взглядах Эпикура (IV-III вв. до н.э.). Все явления природы Эпикур объяснял различными сочетаниями атомов. Рассматривая вопрос о роли случайного в окружающем мире, он пришел к выводу, что случай присущ самой природе вещей. Однако Эпикуру не удалось последовательно провести идею объективности случайного, так как он обосновывал случайность абстрактной возможностью: все случайно, потому что всегда можно мыслить любую возможность исхода события.

Проблемы философии и атомистики затронуты также в поэме Лукреция Кара «О природе вещей». Лукреций считал, что весь мир создается посредством случайного столкновения атомов. В результате этого атомы, «пройдя всякие виды сочетаний», образуют, наконец, современный мир. Здесь Лукреций предвосхищает идею наиболее вероятного состояния, которая сыграла существенную роль в конце XIX века, когда создавалась статистическая физика. Он также описывает картину движения пылинок в солнечном луче, которая ярко и вполне правильно передает основные положения теории броуновского движения.

Вопросы о соотношении случайного и необходимого всегда находились в поле зрения философов. Фома Аквинский, крупнейший представитель средневековой схоластики, в одном из своих основных трудов «Теологическая сумма» останавливается на соотношении случайного и необходимого в окружающем нас мире. Он приходит к выводу, что в мире должны быть как случайные, так и необходимые вещи. Но случайные вещи, как он считает, не могли существовать вечно, поэтому они требуют наличия необходимой причины, и эта причина могла быть только богом. Английский философ XVII века Гоббс полностью отрицал случайные события: «…может быть доказано, что всякое происшествие, каким бы случайным или произвольным оно ни казалось, произошло в силу необходимости». Приверженцами детерминистического истолкования мира были также Декарт и Спиноза. Для них характерно отрицание случайности и превозношение необходимости, при этом необходимость признается фатальной.

Трактовка понятия случайности как пересечения независимых причинно-следственных рядов была предложена О. Курно [10]. Такое объяснение случайности представляется естественным и в большинстве случаев оказывается удовлетворительным. Однако ограниченность этого представления обнаруживается в неспособности объяснить такие явления, как броуновское движение частиц или радиоактивный распад атомов.

Основной идеей в разработке математического определения случайности явилась идея несовместимости случая и закона, то есть последовательность признается случайной, если не существует никакой закономерности в ее построении. Тем не менее в случайной последовательности, в хаотическом следовании случайных событий существует некоторая регулярность, закономерность, которая выражается в форме вероятностных законов. Блэз Паскаль в своем письме к Ферма писал о соотношении случайности и закономерности: «…почему, собственно, Марк Аврелий считал, что в мире господствует либо случайность, либо порядок и закономерность?... Мне кажется, в действительности оба утверждения не противоречат друг другу, более того, они действуют одновременно: в мире господствует случай и одновременно действует порядок и закономерность, которые формируются из массы случайностей согласно законам случайного» [12]. Утверждение о том, что случайное подчиняется закономерности, может показаться парадоксальным, но лишь для метафизического мышления, абсолютизирующего противоположность между случайным и необходимым. Такой взгляд подверг резкой критике Ф. Энгельс: «Обычный человеческий рассудок, а с ним и большинство естествоиспытателей, рассматривают необходимость и случайность как определения, раз навсегда исключающие друг друга. Какая-нибудь вещь, какое-нибудь отношение, какой-нибудь процесс либо случайны, либо необходимы, но не могут быть и тем и другим»[10]. Далее Энгельс пишет о диалектической взаимосвязи необходимости и случайности. Любое явление или процесс, рассматриваемые в единстве и целостности всех сторон, свойств и отношений, представляют собой единство необходимого и случайного. Случайность, по определению Энгельса, есть форма проявления и дополнения необходимости. Здесь существенна также идея субординации необходимого и случайного: случайное подчинено необходимому, дополняет, конкретизирует необходимое, обусловливает форму его проявления.

Эти глубокие диалектические идеи дают ключ к пониманию взаимосвязи необходимого и случайного в явлениях и процессах, подчиняющихся вероятностным законам. Сквозь иррегулярное и беспорядочное следование случайных событий всегда просвечивает характерная устойчивость, упорядоченность воспроизведения класса событий в целом. Там, «где на поверхности происходит игра случая, там сама эта случайность всегда оказывается подчиненной внутренним, скрытым законам. Все дело лишь в том, чтобы открыть эти законы»[11].

Сравнивая вероятностные законы с законами жесткой детерминации, мы видим, что и те и другие выражают существенные, необходимые, повторяющиеся черты в поведении соответствующих классов объектов. Но если законы жесткой детерминации позволяют однозначным образом предсказать поведение рассматриваемого объекта, то вероятностные законы предсказывают лишь вероятность соответствующего изменения.

Говоря о связи вероятности с категорией причинности, следует заметить, что пока наука не выходила за пределы детерминистских схем описания, идея причинной обусловленности всех явлений и процессов воспринималась как нечто само собой разумеющееся. Вот что писал о принципе причинности О. Курно: «Часто причина от нас ускользает, или мы считаем причиной то, что в действительности ею не является; однако ни наша беспомощность при пользовании принципом причинности, ни ошибки, в которые мы впадаем при его применении, не могут поколебать нашу убежденность в истинности этого принципа, признанного как необходимое и не знающее исключений правило» [10].

По мере того, как в науке все более заметную роль приобретали вероятностные представления, среди философов стали возникать сомнения в абсолютности и объективности принципа причинности. В попытке согласовать принцип причинности с идеей вероятности возникло понятие так называемой вероятностной причинности. Сторонники этой концепции требуют отказа от рассмотрения причинно-следственной связи как необходимой. В этом случае они явно или неявно принимают следующую дилемму: либо определенное событие имеет вероятностный исход, либо это событие имеет свою причину. Од-

[10] Энгельс Ф. Диалектика природы.
[11] Энгельс Ф. Людвиг Фейербах и конец классической немецкой философии.

нако утверждения о вероятности события и о его причинной обусловленности не являются взаимоисключающими.

Отрицание причинности опирается в основном на квантовую механику, причем вывод об отсутствии причинности делают на том основании, что в квантовой механике одно и то же воздействие на несколько экземпляров микрочастицы, находящихся в одном и том же состоянии, дает различные исходы. Чтобы выявить роль принципа причинности в квантовой механике, нужно выяснить, каким образом можно описывать процессы порождения событий в микромире [9]. Если в классической механике история системы есть не что иное, как наблюдаемое изменение ее параметров в реальном макроскопическом пространстве и в определенном интервале времени, то в квантовой механике эмпирическое прослеживание истории системы в пространстве и времени не способно адекватно выразить сложную корпускулярно-волновую природу микрообъектов. Для адекватного описания системы привлекают абстрактные математические понятия, в результате чего квантовая механика однозначно отвечает на вопрос, почему реализуется то или иное состояние системы, хотя для наблюдаемых значений динамической переменной дает лишь вероятностные предсказания. По словам Н. Бора, урок, который преподала квантовая механика, «показал нам еще раз, что никакое содержание нельзя уловить без привлечения соответствующей формы и что всякая форма, как бы ни была она полезна в прошлом, может оказаться слишком узкой для того, чтобы охватить новые результаты» [9].

Таким образом, квантовая механика не исключает причинного объяснения поведения микрообъектов, а лишь меняет форму объяснения вследствие качественного своеобразия процессов причинения в микромире. В этой связи представляется уместным привести также цитату из «Писем о вероятности», где Паскаль рассматривает принцип причинности как своего рода аксиому. «Она не только не доказуема, но и не нуждается в доказательстве; она является основой нашего научного мировоззрения, и каждый закон природы, открытый наукой, служит дополнительным аргументом правильности и необходимости этой аксиомы» [12].

§3. Вероятность и достоверность

1. Вероятность в процессе познания

Понятие вероятности играет очень важную роль в процессе познания. Одной из проблем теории познания является вопрос о соотношении вероятностного знания и достоверного. Л. В. Смирнов рассматривает вероятность и достоверность как характеристики различных уровней внелогической обоснованности знания [13]. Достоверность означает полную, абсолютную, исчерпывающую фактическую обоснованность какого-либо утверждения о явлении материальной действительности в отличие от вероятности как неполного, частичного, относительного обоснования его. Вероятность и достоверность выступают как противоположные и связанные друг с другом характеристики знания. Различие между вероятностью и достоверностью знания не только количественное (различие в степени обоснованности), но и качественное, поскольку вероятность знания означает, что имеется некоторое основание и для его отрицания, в то время как достоверность знания есть свидетельство его единственности и невозможности его отрицания. Далее, в силу непрерывного развития практической деятельности обоснованность знания всегда является подвижной. Более того, сама достоверность знания абсолютна лишь в том смысле, что это знание обосновано всем объемом практической деятельности на данном ее этапе. С изменением этой практической деятельности возможны как переход к новой абсолютной обоснованности, так и, напротив, понижение степени обоснованности до относительной – до уровня вероятности.

2. Соотношение вероятности и достоверности в научном доказательстве

Особый интерес представляет соотношение вероятности и достоверности в научном доказательстве.

Всякое доказательство на теоретическом уровне знания есть система логически правильных умозаключений, которую можно представить в виде суждений, связанных между собой по некоторым правилам. Общепризнанно, что в области наук, использующих эмпирические посылки, которые непосредственно отражают материальную действительность, достижение достоверности как абсолютной доказательности является невозможным. Однако, как отмечает Л. В. Смирнов, момент относительной доказательности – момент вероятности – присущ также и математике [13]. С одной стороны, это связано с исторически меняющимися требованиями, предъявляемыми к математическому доказательству, в частности, к его строгости на разных этапах развития математики. Логические правила, которыми руководствуются математики в процессе доказательства, не остаются неизменными и время от времени подвергаются пересмотру, как это, в частности, произошло с принципом tertium non datur (исключенного третьего). С другой стороны, математики вынуждены использовать в доказательствах посылки, недоказуемые в рамках самой математики. Так, теорема Геделя утверждает, что всякая непротиворечивая формальная теория, формализующая арифметику натуральных чисел, неполна, то есть содержит такую истинную формулу, которую средствами данной теории доказать нельзя. Эта невозможность достижения абсолютной доказанности является своеобразным проявлением того факта, что в конечном счете вся математика имеет «внематематическое» обоснование, которым является объективный мир, отображаемый в ней. О невозможности абсолютной достоверности доказательства в математике говорил еще Аристотель: «…для всего без исключения доказательства существовать не могут (ведь ряд уходил бы в бесконечность, так что и в этом случае доказательства бы не было)» [13]. Хотелось бы подчеркнуть, что все это ни в коей мере не умаляет значения математики, определенной строгости и справедливости ее теорем и следствий, хотя и при известных ограничениях.

Говоря о достоверности математических утверждений, следует упомянуть еще один аспект [1]. Многие математические факты мы считаем достоверными в силу того, что их доказательства проверялись тысячами или даже миллионами людей, как, например, доказательства геометрических теорем, восходящих к Евклиду. Вероятность того, что все эти люди допустили одну и ту же ошибку, очевидно, ничтожно мала. Однако, вполне возможно или, иначе говоря, вероятно, что «некоторые частные, не очень интересные результаты не привлекли ничьего внимания и, быть может, около века спят в пыли библиотек и что среди них есть неверные». Тем не менее, это не уменьшает нашей уверенности в достоверности общепринятых математических результатов, изложенных в многочисленных учебниках и многократно проверенных.

3. Вероятность и гипотеза

Знание никогда не возникает в окончательно сложившемся виде. Стадия гипотезы является обязательным этапом в процессе формирования любого знания. Энгельс отмечал, что «формой развития естествознания, поскольку оно мыслит, является гипотеза»[12]. В силу своего вероятностного характера гипотеза требует проверки, доказательства. После такой проверки гипотеза или становится научной теорией, или видоизменяется, или отбрасывается, если проверка дает отрицательный результат.

В форме занимательного диалога Галилея и синьоры Никколини А. Реньи рассказывает о роли гипотезы в научном познании [12]. Процитируем фрагмент этого диалога.

«Синьора Никколини. Мне непонятно, почему о теории Коперника вы сказали, что убеждены в ее правильности, хотя не можете доказать этого. Как можно быть убежденным в правильности того, что нельзя доказать? Если же у вас имеются веские причины, чтобы считать теорию Коперника верной, то для чего тогда вам нужны еще какие-то доказательства?

Галилей. Каверзный вопрос! В двух словах на него не ответишь. Чтобы вам все стало понятно, я с вашего разрешения сначала расскажу вам кое-что о научном методе. Но прежде ответьте мне на один вопрос, который не дает мне покоя: как вам удалось обнаружить, что ваш слуга шпионит за мной?

Синьора Никколини. Охотно расскажу вам, как все произошло. Меня насторожило, что Джузеппе (так звали этого негодяя) время от времени исчезал и подолгу пропадал где-то. В прошлую пятницу я пошла днем на рынок и встретила его в подворотне, где он о чем-то шептался с монахом-доминиканцем. Мне это показалось подозрительным, но я не была уверена в том, что он подослан инквизицией, и решила его проверить. Я посадила одного из моих ловчих соколов в мешок и попросила патера Кастелли отправить его к нам домой, адресовав синьору Галилею. Когда в дверь постучали, я приказала Джузеппе пойти открыть и, выждав несколько минут, отправилась вслед за ним. И что же я вижу? Сокол летает по всей лестнице, а Джузеппе с руками, искусанными в кровь, пытается поймать его. Теперь я была почти уверена в

[12] Энгельс Ф. Диалектика природы.

том, что Джузеппе подослан инквизицией, но все же кое-какие сомнения у меня оставались: а вдруг он никакой не соглядатай, а просто чрезмерно любопытен? Тогда я решила произвести еще одну проверку. Я написала письмо архиепископу Асканио Пикколомини, в котором извещала почтенного прелата о вашем здоровье, и как бы невзначай оставила письмо незапечатанным на столе. Затем я сделала вид, будто нечаянно пролила чернила на пол, кликнула Джузеппе, велела ему убрать, а сама вышла на террасу. Там, стоя к нему спиной, я в свое венецианское зеркальце принялась незаметно наблюдать за тем, что он станет делать. Я увидела, как он быстро пробежал глазами письмо, а отдельные места даже скопировал. Теперь у меня не оставалось никаких сомнений, но все же, желая проверить свою догадку еще раз, я на следующий день позвала его и спросила: «Джузеппе, ты умеешь читать и писать?» Он ответил, что не в состоянии нацарапать даже собственное имя. «Так ступай прочь из моего дома! – сказала я ему. – Мне не нужны неграмотные болваны». Не знаю, право, стоило ли докучать вам, синьор Галилей, такой длинной историей».

Итак, синьора Никколини, чтобы убедиться, что ее слуга подослан инквизицией, по существу, использовала научный метод исследования, который состоит в следующем. Сначала на основе наблюдений выдвигается гипотеза, затем ставится эксперимент. Если результат эксперимента противоречит исходной гипотезе, то ее надлежит отвергнуть. Если же результат согласуется с гипотезой, необходимо выяснить, нельзя ли исход эксперимента объяснить как-нибудь иначе. Если можно, то есть существует другая гипотеза, объясняющая исход эксперимента, то необходимо придумать новый эксперимент, который позволил бы выяснить, какая из двух гипотез верна. С каждым новым экспериментом, исход которого предсказуем заранее на основании принятой нами гипотезы и с трудом согласуется с другой гипотезой, крепнет наша уверенность в том, что принятая гипотеза верна (хотя решающего доказательства ее правильности нет).

Если одна из двух альтернативных гипотез имеет очень малую вероятность, естественно принять вторую гипотезу. Э. Борель приводит пример, когда из миллиона подбрасываний монеты 506500 раз выпадает орел [1]. В этом случае из двух гипотез – случайного исключительного отклонения[13] и отсутствия симметрии монеты – следует выбрать вторую, так как вероятность такого исключительного отклонения равна примерно 10^{-40}.

О. Курно, подчеркивая роль гипотезы в математике, писал, что вероятные предположения позволяют математикам «предчувствовать искомую истину раньше, чем им удается найти для нее доказательства и в таком уже виде представить ее на суд для всех тех, кто способен следить за цепью строгих рассуждений» [10].

[13] Имеется в виду отклонение частоты выпадения орла, равной 0.5065, от вероятности этого события, равной 0.5.

§4. Пренебрежимые вероятности

Какие вероятности следует считать достаточно малыми, чтобы ими можно было пренебречь? Этот вопрос подробно рассматривается в книге Э. Бореля «Вероятность и достоверность» [1]. Во-первых, нельзя не согласиться, что все зависит от конкретной ситуации. Если, например, вероятность дождя равна 0.01 (один шанс из ста), то вполне можно выйти из дома без зонта, посчитав эту вероятность незначительной. С другой стороны, вряд ли кто-нибудь спокойно выпьет стакан воды, зная, что с вероятностью 0.01 в него подсыпан яд. Вторая сторона вопроса заключается в том, можно ли в каких-то случаях считать вероятность абсолютно пренебрежимой, то есть рассматривать соответствующее событие как «практически невозможное».

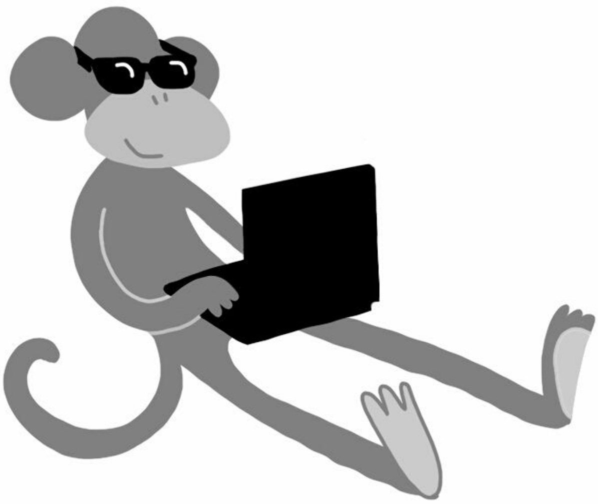
Приведем два примера.

1) Чудо Джинса.

В хорошо нагретую печь ставят сосуд с водой. Может ли случиться, что вода не закипит, а напротив, превратится в лед? Английский физик Джинс вычислил вероятность такого чуда, она не превосходит $10^{-1000000}$. Можем ли мы, в согласии со здравым смыслом, считать чудо Джинса невозможным или должны признать его только «маловероятным»?

2) Дактилографическое чудо.

Обезьяны беспорядочно нажимают на клавиши пишущих машинок. Возможно ли, что они случайно воспроизведут полное собрание сочинений Льва Толстого или Шекспира? Вероятность такого чуда тоже может быть вычислена; как и в случае чуда Джинса, она ничтожно мала. Можно ли рассматривать дактилографическое чудо как «практически невозможное»?



Чтобы представить себе, сколь малы вероятности, о которых идет речь, сравним их порядок с наименьшими и наибольшими числами, с которыми можно иметь дело на практике. Наибольшие расстояния в доступной изучению вселенной оцениваются учеными как не превосходящие 10^{30} см, а наименьшие линейные размеры микрочастиц – как превышающие 10^{-20} см. Таким образом, для оценки размеров вселенной с помощью наименьшей возможной инфрамолекулярной шкалы достаточно чисел, меньших 10^{50} для линейных размеров и, соответственно, 10^{150} – для объемов. Далее, наибольший промежуток времени, который соответствует эволюции вселенной, не превосходит 10^{20} секунд, а самые короткие промежутки времени (время жизни микрообъектов) составляют не менее чем 10^{-30} секунд. Следовательно, для измерения любого промежутка времени достаточно чисел, не превосходящих 10^{50}. Умножая оценку для наибольшего объема на оценку наибольшего промежутка времени, мы получаем $10^{150}\times10^{50}=10^{200}$. Это максимально возможное число элементарных событий, «могущих произойти во вселенной, – событий, локализованных в минимально возможном объеме и во времени происходящих в кратчайшие сроки» [1].

Если взять отношение вероятности достоверного события (которую принимают равной единице) к вероятности чуда Джинса или дактилографического чуда, мы получим число, превосходящее $10^{1000000}$, что в 10^{999800} раз превышает полученное наибольшее число всех элементарных событий во вселенной. Пожалуй, это веское основание считать такие события, как чудо Джинса или дактилографическое чудо, практически невозможными, а их вероятности – абсолютно пренебрежимыми, что, кстати, согласуется и с нашими интуитивными представлениями.

Следует, однако, заметить, что в теории вероятностей невозможное событие всегда имеет нулевую вероятность, а такие выражения как «практически невозможное» или «практически достоверное» событие, не используются.

В заключение хотелось бы обратить внимание на некоторые моменты, представляющиеся существенными для философского анализа вероятности. Иногда понятие вероятности в различных контекстах наполнено разным содержанием. Поэтому при исследовании вероятности необходимо четко оговаривать, какое значение этого понятия в данном случае рассматривается. Следует также подчеркнуть большое значение теории вероятностей (начиная от аксиом и кончая важнейшими теоремами) для лучшего понимания сущности и свойств вероятности.

Понятие вероятности всегда волновало и продолжает волновать умы как философов, так и математиков. По-видимому, только их совместные усилия могут и должны принести богатые плоды в изучении этого сложного и интереснейшего понятия.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Глава 1

1.1.2. а) $A_7^5 = 2520$; б) $3A_6^4 = 1080$.

1.1.3. а) $4 \cdot 51!$; б) $13 \cdot 51!$

1.1.4. $A_{10}^4 = 5040$.

1.1.5. $80 \cdot 79 \cdot C_{78}^3 = 80 \cdot 79 \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \approx 2\,884\,801\,920$.

1.1.6. $C_{16}^4 \cdot C_4^2 = 10920$.

1.1.7. $C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 210$.

1.2.1. A+B ={1, 2, 3, 4, 5}; A-B ={5}; $\overline{A}B$={2, 4}; $\overline{A}$+B ={1, 2, 3, 4, 6}.

1.2.2. A+B=A={хотя бы одно изделие бракованное};
AB=B={бракованных изделий не меньше двух};
AB=B={бракованных изделий не меньше двух};
$\overline{A}$={бракованных изделий нет};
$\overline{B}$= {бракованных изделий не более одного};
A-B={ровно одно изделие бракованное};
B-A=$\varnothing$ (невозможное событие).

1.2.3. а) $26 \cdot 26 = 676$; б) $(4 \cdot 8) \cdot (4 \cdot 4) = 512$.

1.2.4. A+B ={выпал король или карта красной масти}, 4+(26-2)=28 исходов;
AB={выпал король красной масти}, 2 исхода;
A-B={выпал король черной масти}, 2 исхода;
$\overline{A}$={выпала любая карта кроме королей}, 52-4=48 исходов;
$\overline{B}$= {выпала карта черной масти}, 26 исходов;
$\overline{A}B$={выпала любая карта красной масти кроме королей}, 26-2=24 исхода;
$A\overline{B}$={выпал король черной масти}, 2 исхода.

1.3.1. $\dfrac{C_6^2 \cdot C_6^4}{C_{12}^6} = \dfrac{75}{308} \approx 0{,}244.$

1.3.2. Введем обозначения для различных исходов эксперимента:
A_{03}={вынуты 3 черных шара}, A_{12}={вынуты 1 белый и 2 черных шара},
A_{21}={вынуты 2 белых шара и 1 черный}, A_{30}={вынуты 3 белых шара}.

Тогда $P(A_{03}) = \dfrac{C_5^3}{C_{15}^3} = \dfrac{2}{91}$, $P(A_{12}) = \dfrac{C_{10}^1 \cdot C_5^2}{C_{15}^3} = \dfrac{20}{91}$, $P(A_{21}) = \dfrac{C_{10}^2 \cdot C_5^1}{C_{15}^3} = \dfrac{45}{91}$,

$P(A_{30}) = \dfrac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \dfrac{24}{91}$. Наиболее вероятно вынуть 2 белых и 1 черный шар.

1.3.3. $\dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$. **1.3.4.** а) $\dfrac{C_5^4}{C_{12}^4} = \dfrac{1}{99}$; б) $\dfrac{C_5^2 \cdot C_7^2}{C_{12}^4} = \dfrac{14}{33}$; в) $1 - \dfrac{C_7^4}{C_{12}^4} = \dfrac{92}{99}$.

1.3.5. $\dfrac{1}{26^2 \cdot 10^4} = \dfrac{1}{6760000} \approx 0{,}00000015$. **1.3.6.** $\dfrac{2 \cdot 3!}{2 \cdot 4!} = \dfrac{1}{4}$.

1.3.7. $\frac{4\cdot4\cdot4}{A_{52}^{3}}=\frac{8}{16575}\approx0{,}0005$.

1.4.1. $\frac{2}{\pi}$. **1.4.2.** $\frac{3}{4}$. **1.4.3.** $1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$**.**

1.5.1. $\frac{3}{4}$. **1.5.2.** $\frac{C_2^2\cdot C_2^1}{C_{26}^3}=\frac{1}{1300}\approx0{,}0008$. **1.5.3.** $\frac{2\cdot3!\cdot2}{2\cdot4!}=\frac{1}{2}$.

1.5.4. $\frac{2}{3}$ (описание исходов эксперимента см. в примере 2 п. 3.2).

1.5.5. Вероятность выиграть для игрока X: $0{,}3\cdot0{,}4+0{,}7\cdot0{,}6=0{,}54$. Вероятность выиграть для игрока Y: $1-0{,}54=0{,}46$.

1.5.6. $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{18}$.

1.5.7. а) $0{,}2\cdot0{,}3=0{,}06$; б) $0{,}2\cdot0{,}7=0{,}14$.

1.5.8. $1-((1-0{,}9)\cdot(1-0{,}8)\cdot(1-0{,}7))=0{,}994$.

1.5.9. $(1-0{,}03)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}01)\cdot(1-0{,}02)\approx0{,}922$.

1.5.10. а) $0{,}7\cdot0{,}9\cdot0{,}5=0{,}315$; б) $0{,}3\cdot0{,}1\cdot0{,}5=0{,}015$;
в) $0{,}3\cdot0{,}9\cdot0{,}5=0{,}135$; г) $0{,}7\cdot0{,}9\cdot0{,}5=0{,}315$.

1.6.1. $0{,}9\cdot0{,}2+0{,}8\cdot0{,}3+0{,}7\cdot0{,}5=0{,}77$.

1.6.2. $0{,}9\cdot0{,}6+0{,}8\cdot0{,}3+0{,}6\cdot0{,}1=0{,}84$. **1.6.3.** $\frac{0{,}9\cdot0{,}4}{0{,}9\cdot0{,}4+0{,}6\cdot0{,}6}=\frac{1}{2}$.

1.6.4. а) $\frac{1}{3}\cdot(0{,}2+0{,}4+0{,}1)=\frac{7}{30}\approx0{,}23$; б) $(0{,}4\cdot\frac{1}{3}):(\frac{7}{30})=\frac{4}{7}$.

1.6.5. а) $\frac{1}{6}\cdot(0{,}9+0{,}8+0{,}6+0{,}6+0{,}5+0{,}2)=0{,}6$; б) $(0{,}1\cdot\frac{1}{6}):(1-0{,}6)=\frac{1}{24}$.

1.6.6. $1\cdot\frac{C_{25}^2}{C_{30}^2}+\frac{C_{24}^1}{C_{28}^1}\cdot\frac{C_{25}^1\cdot C_5^1}{C_{30}^2}=\frac{190}{203}\approx0{,}936$.

Глава 2

2.2.1. $P_5(3)=C_5^3\cdot0{,}7^3\cdot0{,}3^2=0{,}3087$.

2.2.2. $P_6(4)=C_6^4\cdot0{,}6^4\cdot0{,}4^2=0{,}31104$.

2.2.3. а) 3 партии из 4, т.к.

$P_4(3)=C_4^3\cdot(\frac{1}{2})^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$; $P_8(5)=C_8^5\cdot(\frac{1}{2})^5\cdot(\frac{1}{2})^3=\frac{7}{32}$; $\frac{1}{4}>\frac{7}{32}$.

б) Не менее 5 партий из 8, т.к.

$P_4(3)+P_4(4)=\frac{5}{16}$; $P_8(5)+P_8(6)+P_8(7)+P_8(8)=\frac{93}{256}>\frac{5}{16}$.

2.2.4. $P_6(3)=C_6^3\cdot(\frac{1}{5})^3\cdot(\frac{4}{5})^3=0{,}08192$, т.к. в схеме Бернулли $n=6$; $p=\frac{1}{5}$.

2.2.5. а) $(1-0{,}4^2)\cdot0{,}7^2=0{,}4116$.

б) $0,4^2 \cdot 0,3^2 + (C_2^1 \cdot 0,6 \cdot 0,4) \cdot (C_2^1 \cdot 0,7 \cdot 0,3) + 0,6^2 \cdot 0,7^2 = 0,3924$.

в) $1 - 0,3924 = 0,6076$.

2.2.6. а) $0,9^4 = 0,6561$. б) $0,9^4 + C_4^1 \cdot 0,1 \cdot 0,9^3 = 0,9477$. в) $0,1^4 = 0,0001$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борель Э.* Вероятность и достоверность. – М.: Наука, 1969.
2. *Бородин А. Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. – СПб.: Изд-во «Лань», 2011.
3. *Веселовская А. З.* Основы теории вероятностей: учеб.-метод. пособие. – СПб.: Издат. центр факультета менеджмента СПбГУ, 2005.
4. *Веселовская А. З., Шепелявая Н. Б.* Математика: логика, множества, отображения. Избранные аспекты в элементарном изложении: учеб. пос./ – изд. 2-е, перераб. и доп. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014.
5. *Виленкин Н. Я.* Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975.
6. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2004.
7. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки: книга 3-я. – Изд-е 2-е. – Петроград, 1915.
8. *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.* Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука,1982.
9. *Кравец А. С.* Природа вероятности. – М.: Мысль, 1976.
10. *Курно О.* Основы теории шансов и вероятностей. – М.: Наука, 1970.
11. *Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж.* Вероятность. – М.: Мир, 1969.
12. *Реньи А.* Трилогия о математике. – М.: Мир, 1980.
13. *Смирнов Л.В.* Вероятность и ее роль в научном познании. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1971.
14. *Товстик Т. М., Алексеева Н. П.* Задачник по теории вероятностей: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ